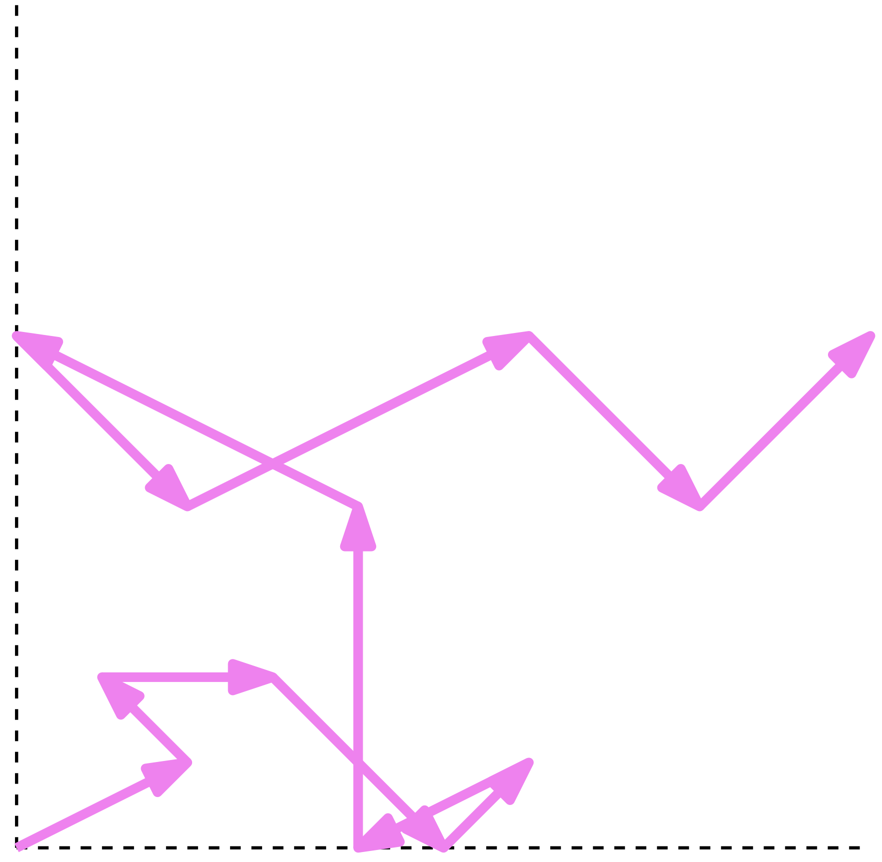
La longue marche à travers le quart de plan

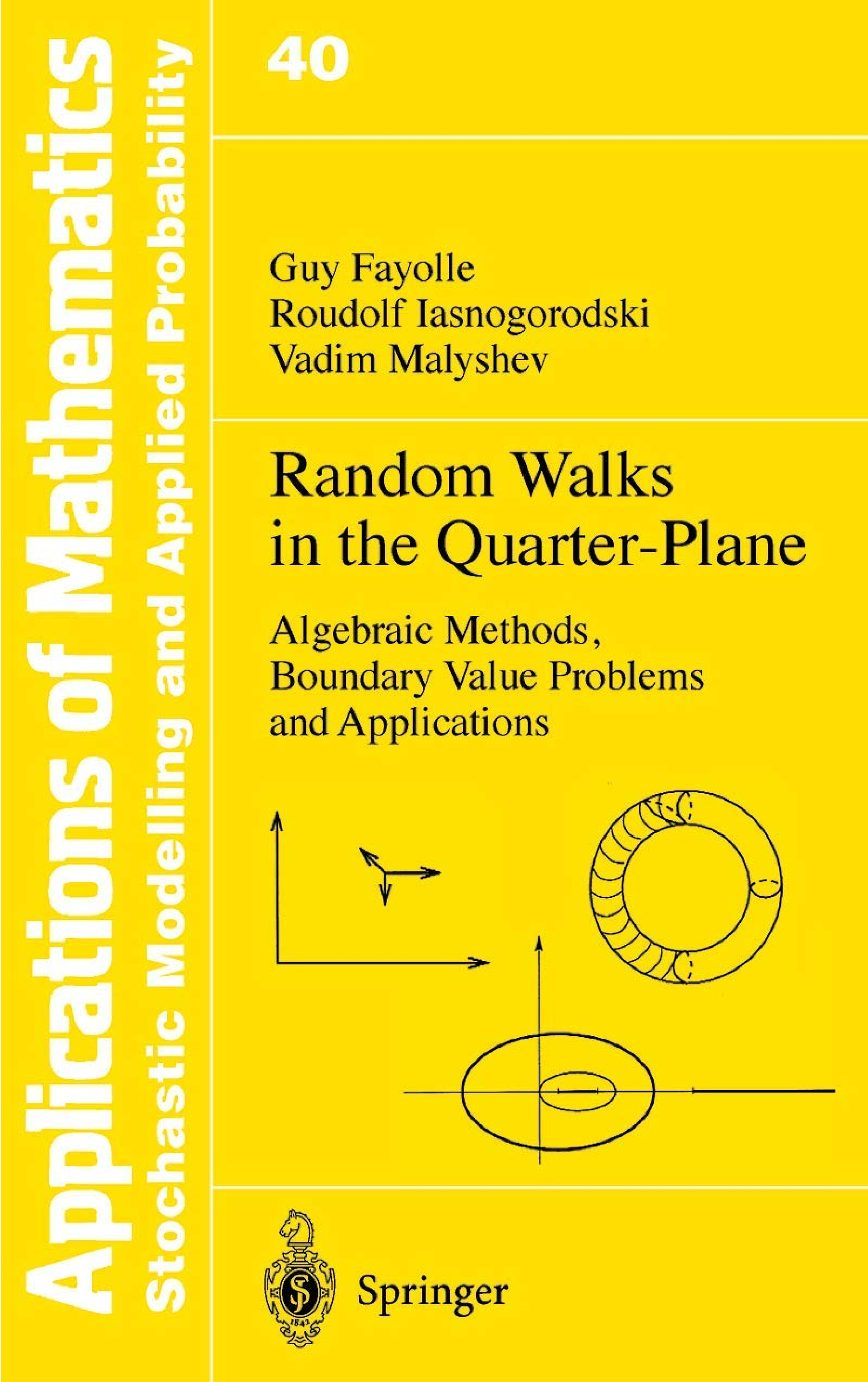
Soutenance de thèse

Pierre Bonnet

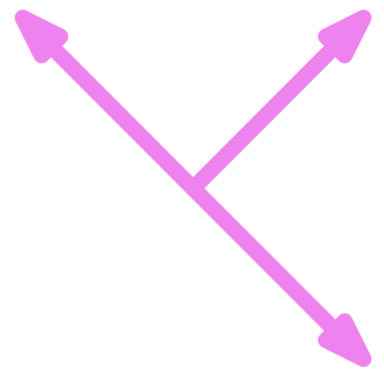
10 Février 2026



0. Chemins dans le quadrant

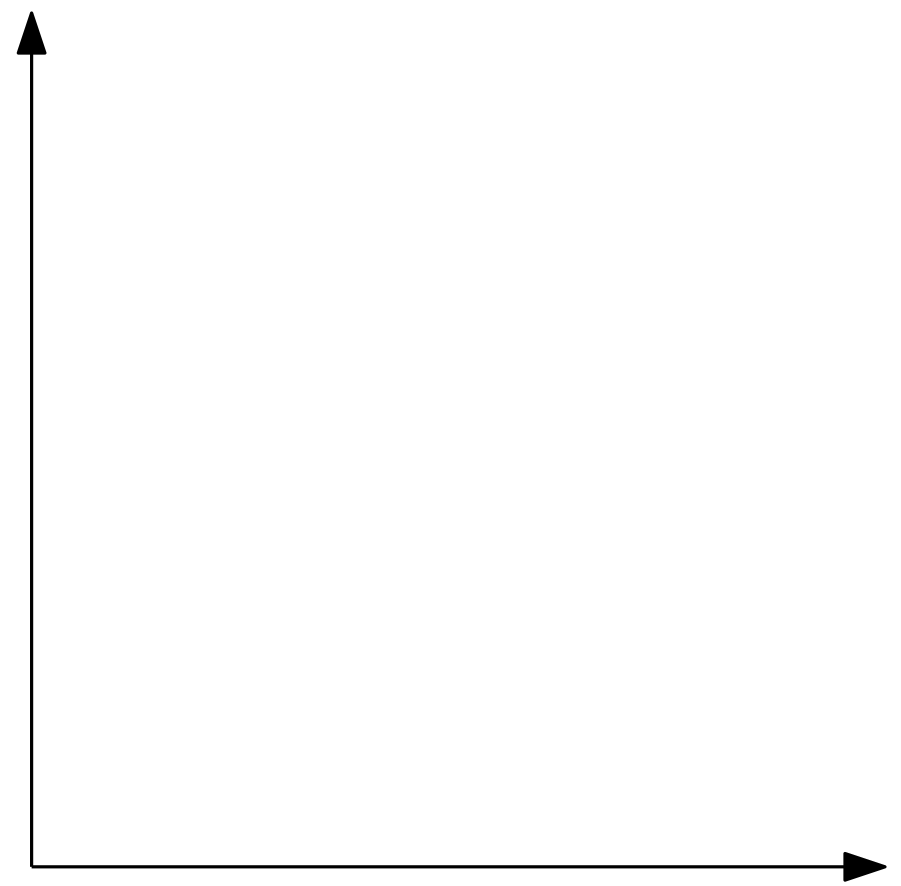


Modèle et chemins contraints

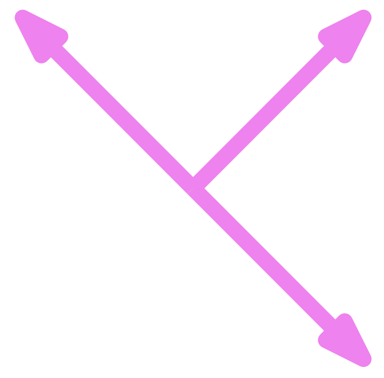


$\mathcal{S} = \{(1,1),(1,-1),(-1,1)\} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

($\mathcal{S}$ est un modèle)

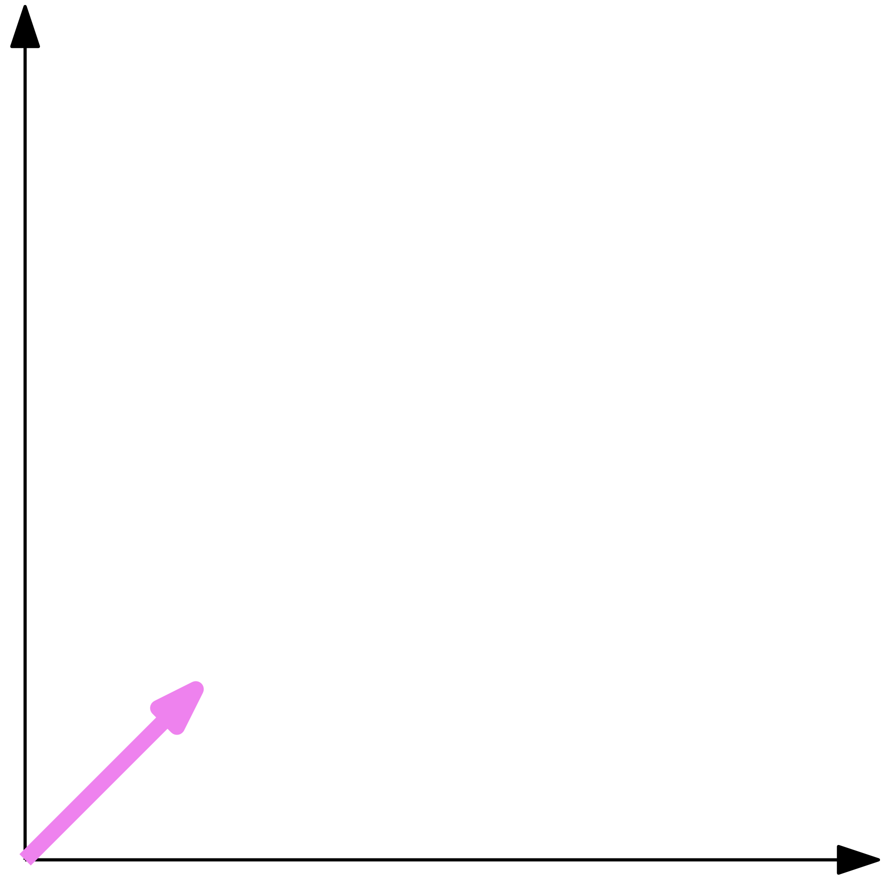


Modèle et chemins contraints

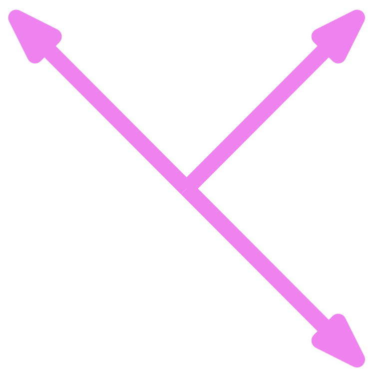


$\mathcal{S} = \{(1,1),(1,-1),(-1,1)\} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

($\mathcal{S}$ est un modèle)

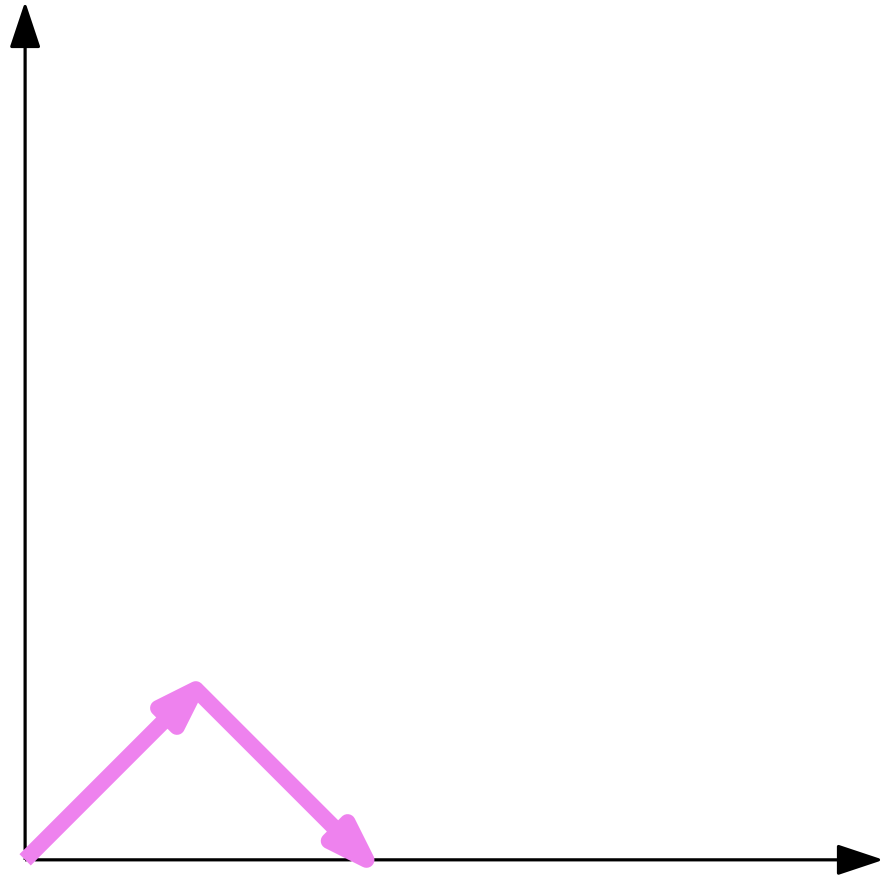


Modèle et chemins contraints

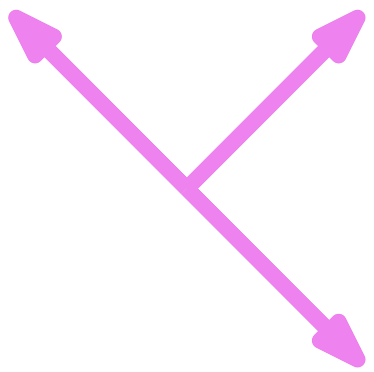


$\mathcal{S} = \{(1,1),(1,-1),(-1,1)\} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

($\mathcal{S}$ est un modèle)

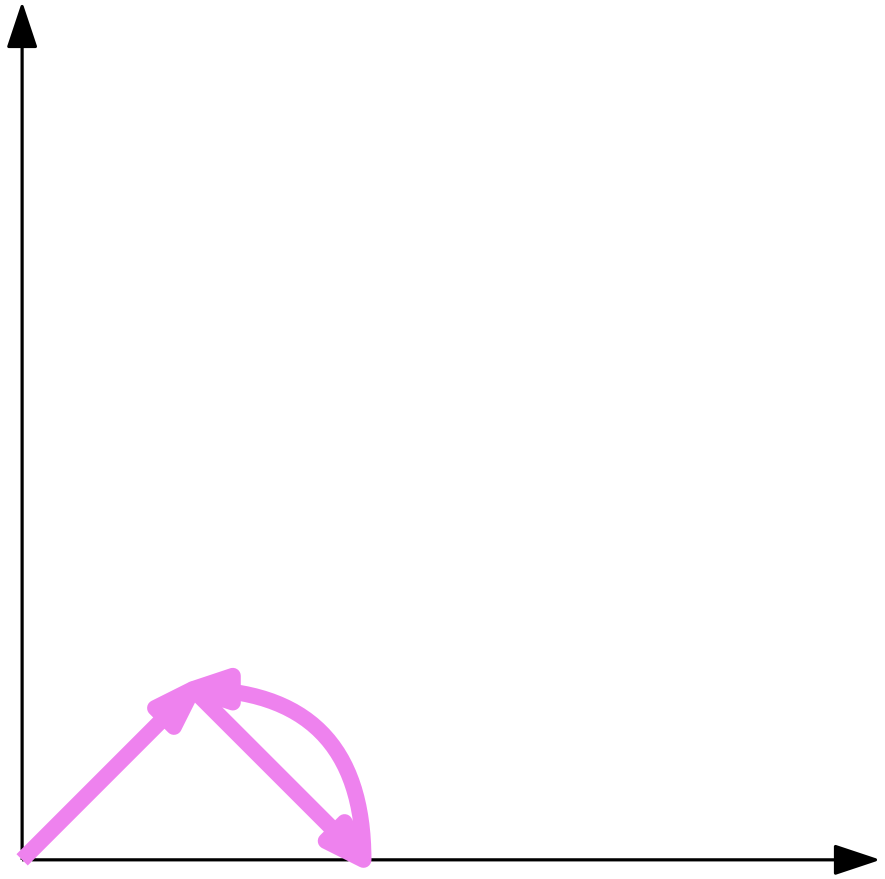


Modèle et chemins contraints

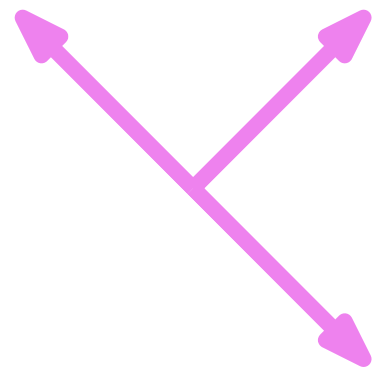


$\mathcal{S} = \{(1,1),(1,-1),(-1,1)\} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

($\mathcal{S}$ est un modèle)

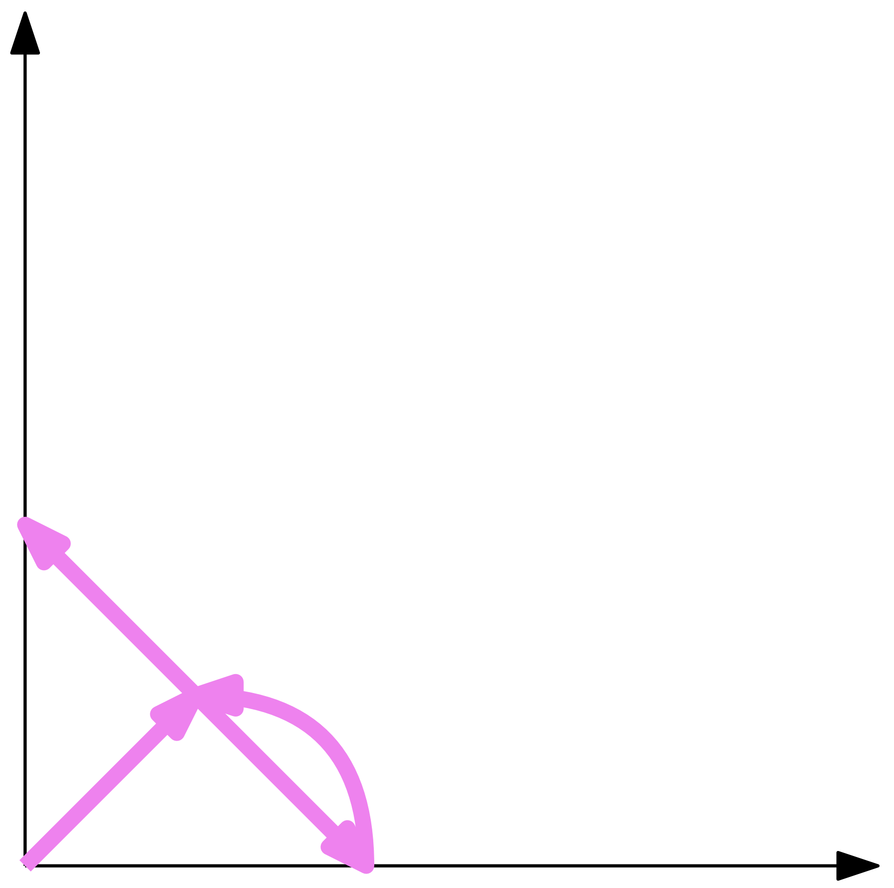


Modèle et chemins contraints

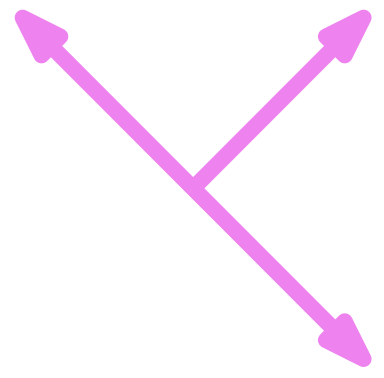


$\mathcal{S} = \{(1,1),(1,-1),(-1,1)\} \subset \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

($\mathcal{S}$ est un modèle)

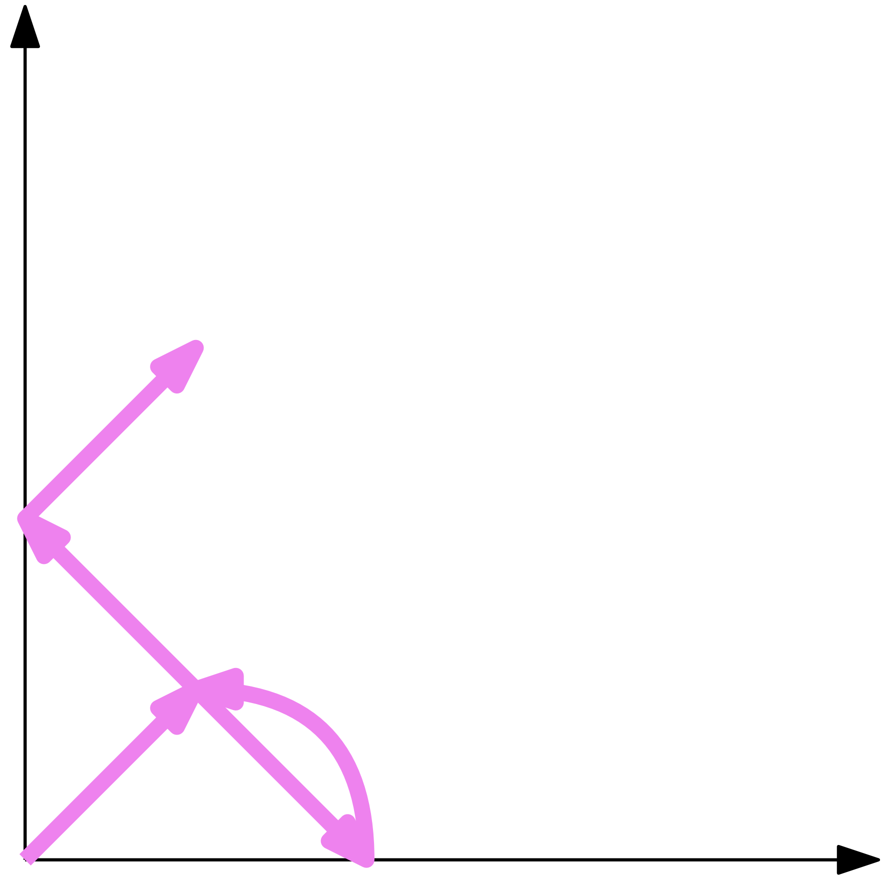


Modèle et chemins contraints

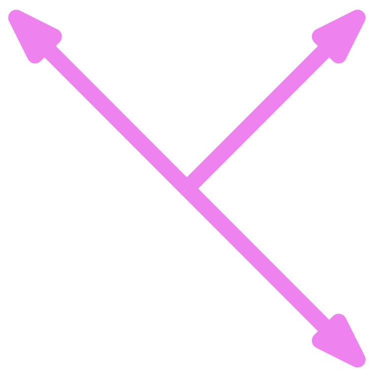


$\mathcal{S} = \{(1,1),(1,-1),(-1,1)\} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

($\mathcal{S}$ est un modèle)

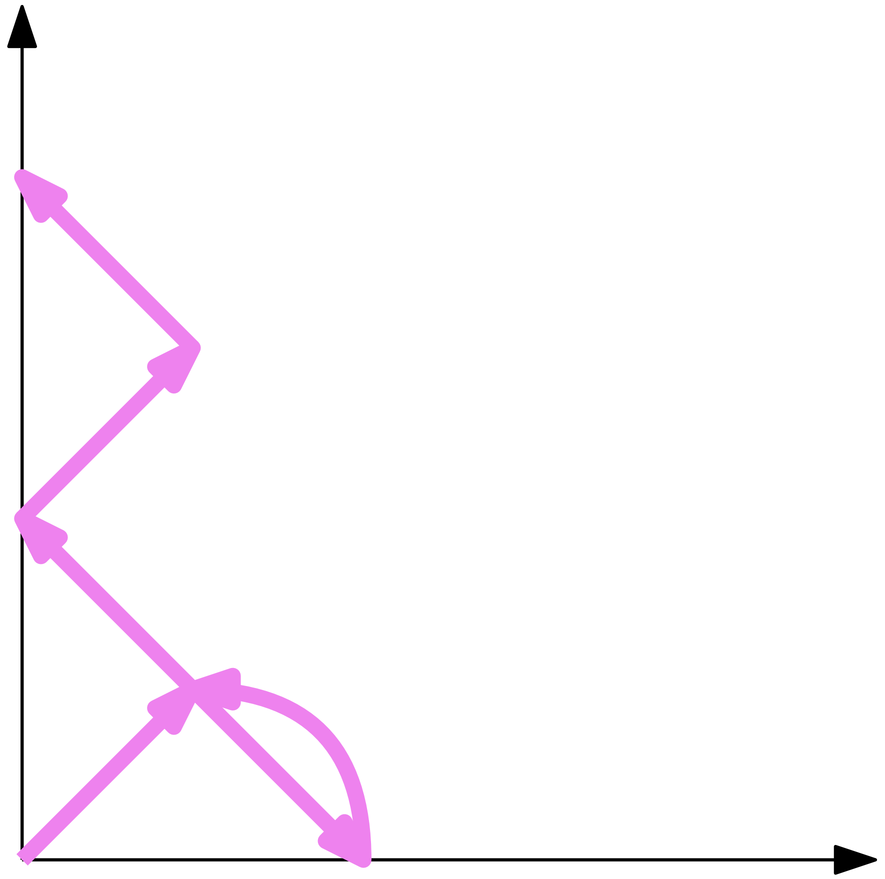


Modèle et chemins contraints

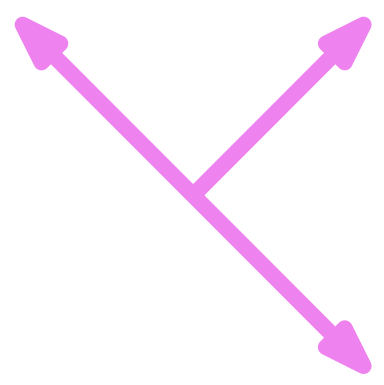


$\mathcal{S} = \{(1,1),(1,-1),(-1,1)\} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

($\mathcal{S}$ est un modèle)

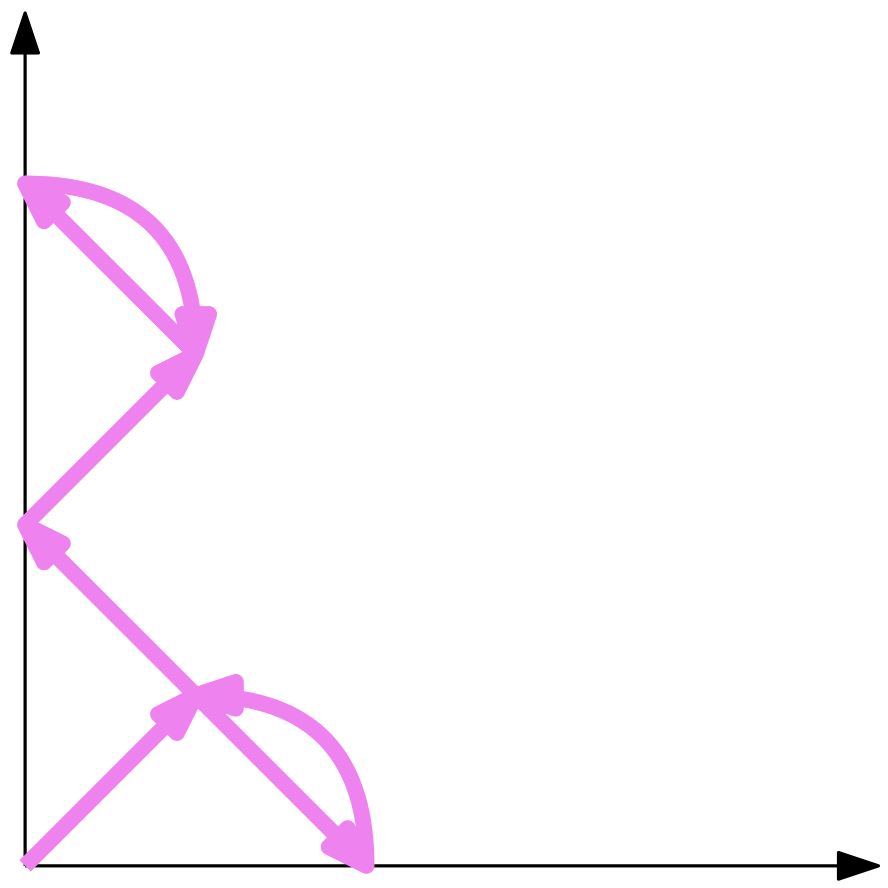


Modèle et chemins contraints

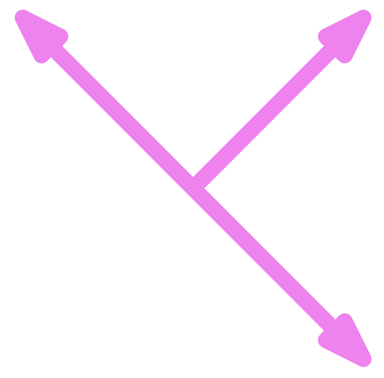


$\mathcal{S} = \{(1,1), (1,-1), (-1,1)\} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

($\mathcal{S}$ est un modèle)

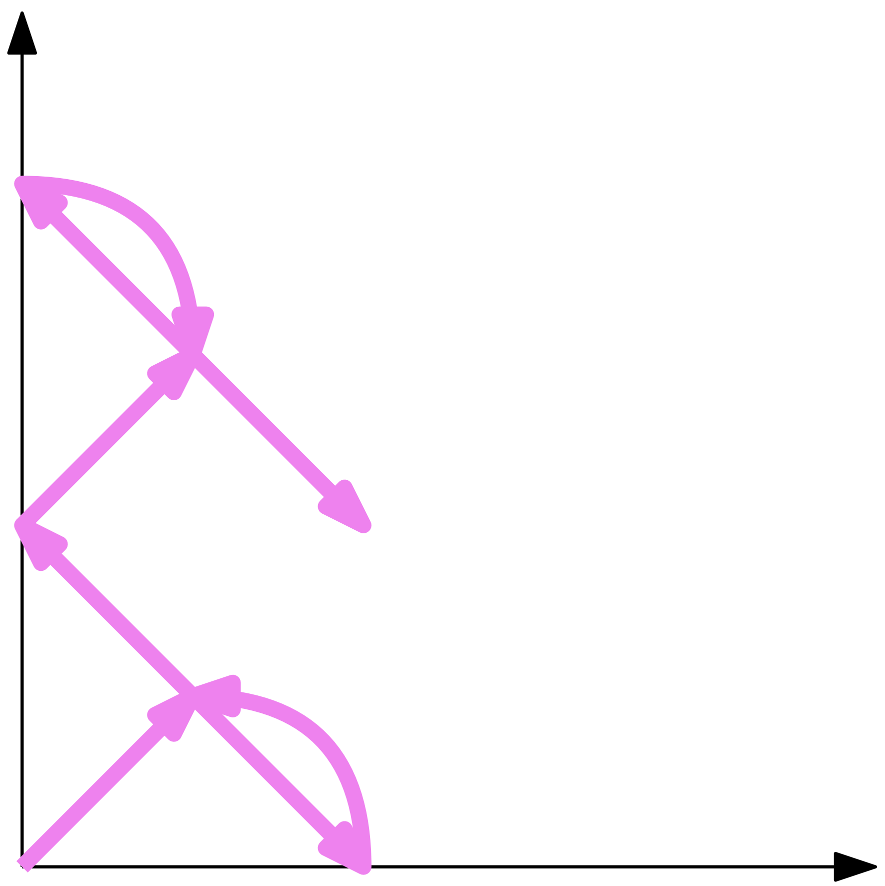


Modèle et chemins contraints

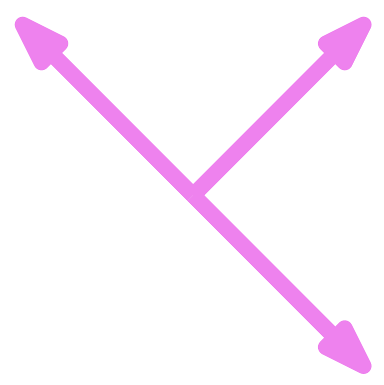


$\mathcal{S} = \{(1,1),(1,-1),(-1,1)\} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

($\mathcal{S}$ est un modèle)

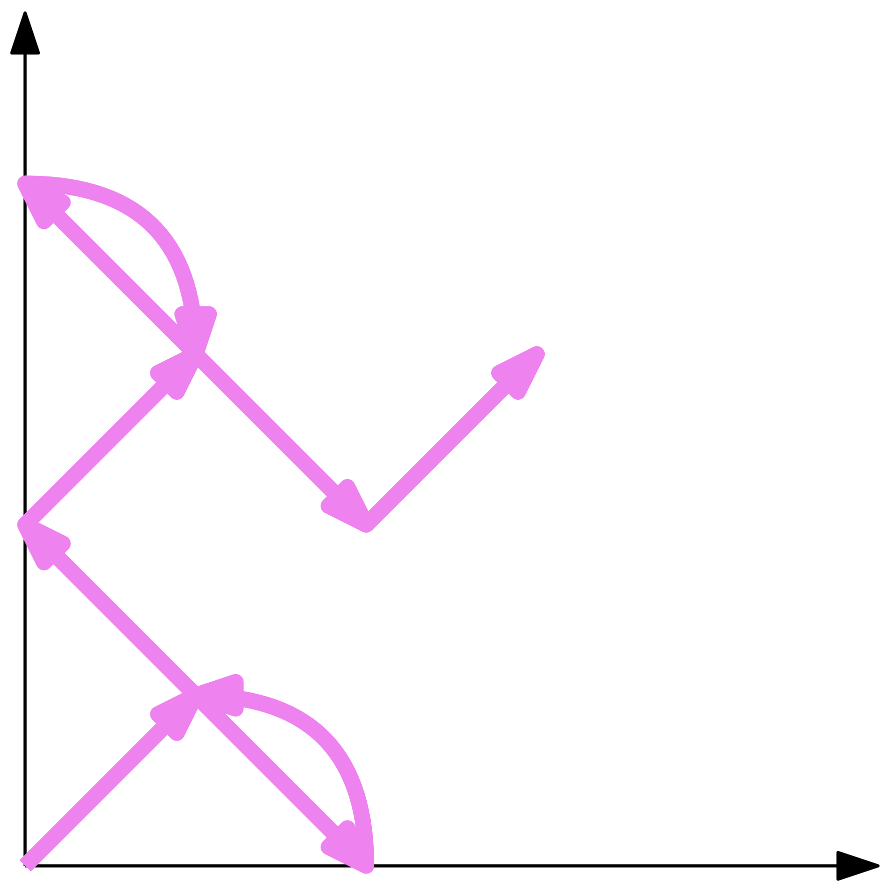


Modèle et chemins contraints

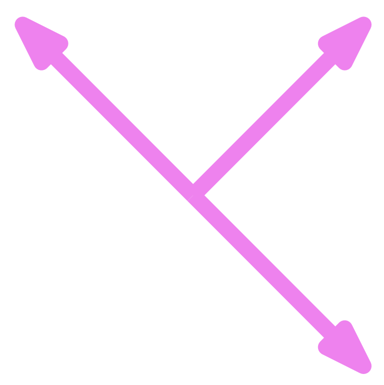


$\mathcal{S} = \{(1,1),(1,-1),(-1,1)\} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

($\mathcal{S}$ est un modèle)

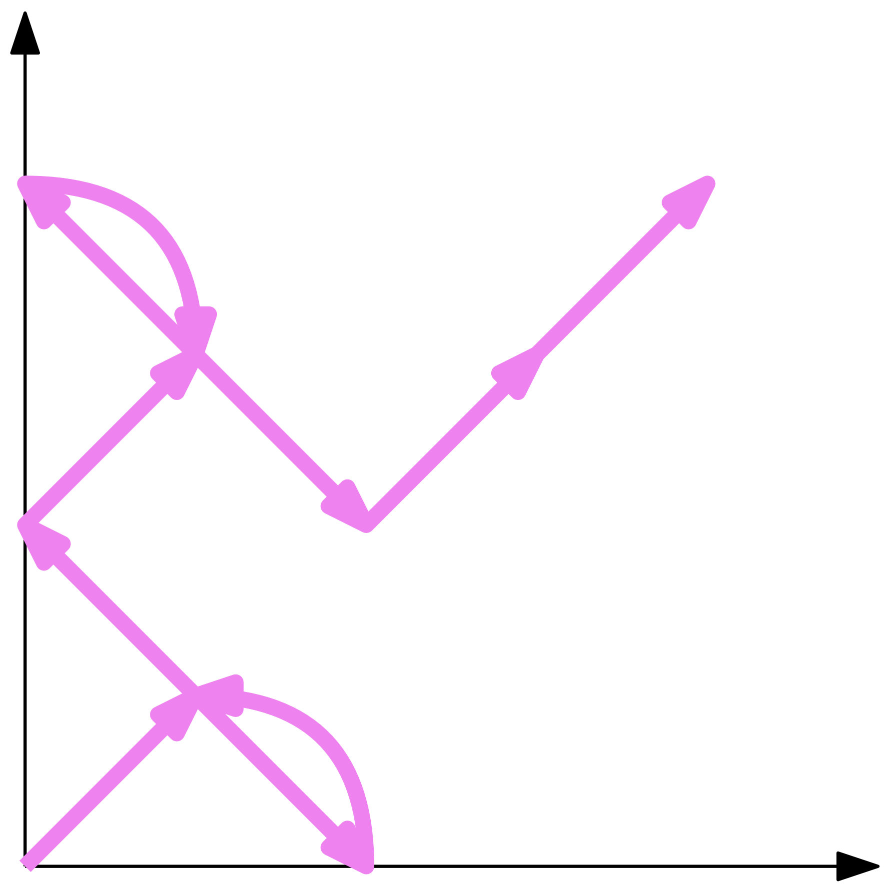


Modèle et chemins contraints

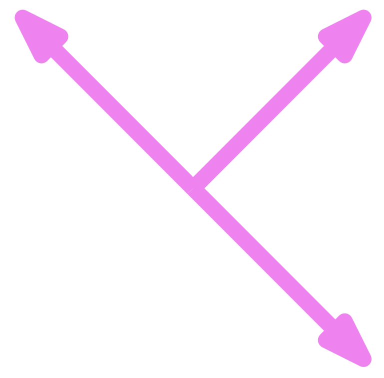


$\mathcal{S} = \{(1,1),(1,-1),(-1,1)\} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

($\mathcal{S}$ est un modèle)

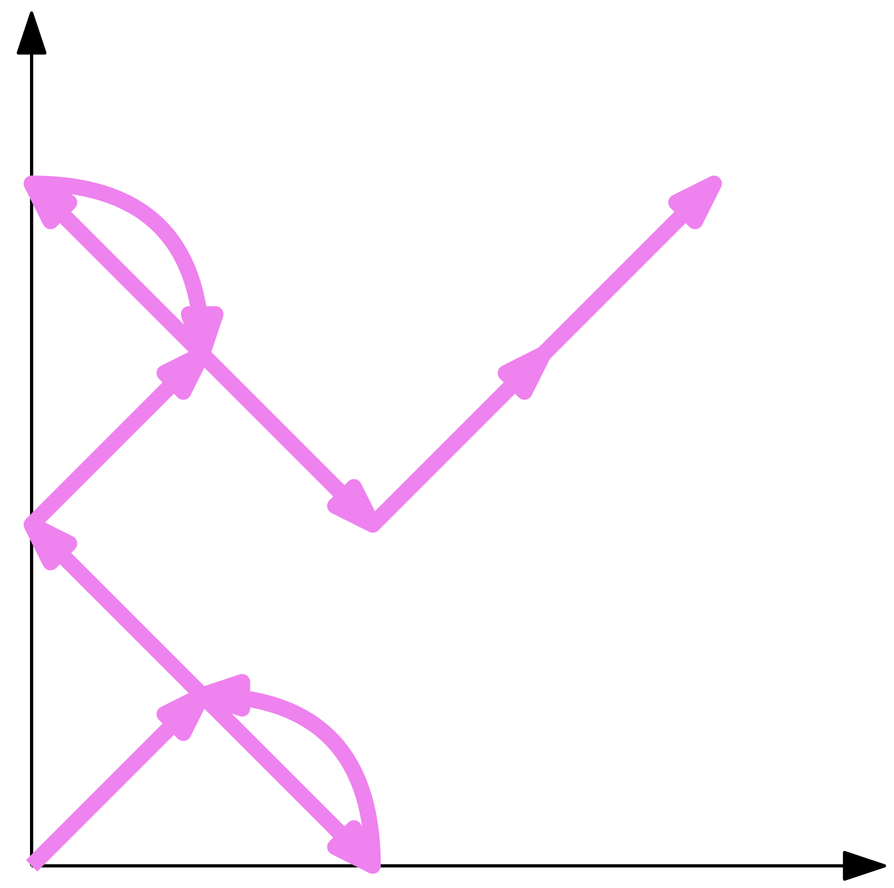


Modèle et chemins contraints



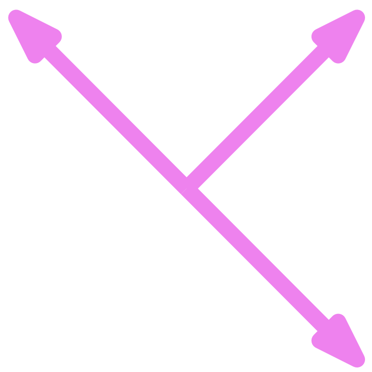
$\mathcal{S} = \{(1,1), (1,-1), (-1,1)\} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

($\mathcal{S}$ est un modèle)



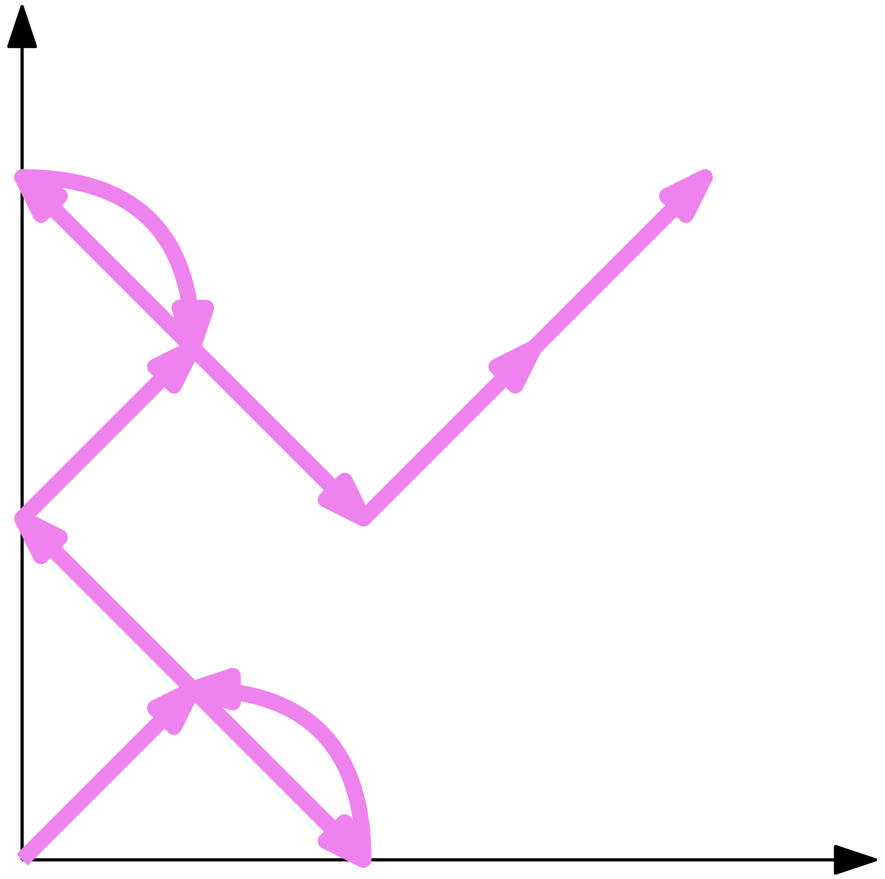
10 pas

Modèle et chemins contraints



$\mathcal{S} = \{(1,1),(1,-1),(-1,1)\} \subset \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

($\mathcal{S}$ est un modèle)



10 pas

Étant donné un modèle $\mathcal{S}$, dénombrer les chemins dans le quadrant de longueur n.

Sages conseils

Maybe more than a "trick," but if you want to investigate a sequence $a_0, a_1, \ldots$, then look at a generating function such as $\sum a_n x^n$ or $\sum a_n \frac{x^n}{n!}$. If you are interested in a function $f : \mathrm{Par} \to R$, where R is a commutative ring and Par is the set of all partitions λ of all integers $n \geq 0$, then look at a generating function $\sum_\lambda f(\lambda) N_\lambda b_\lambda$, where $\{b_\lambda\}$ is one of the standard bases for symmetric functions and N_λ is a normalizing factor (analogous to $1/n!$). For instance, if f^λ is the number of standard Young tableaux of shape λ, then $\sum_\lambda f^\lambda s_\lambda = 1/(1-s_1)$, where s_λ is a Schur function. If $f(\lambda)$ is the number of square roots of a permutation $\lambda \in \mathfrak{S}_n$ of cycle type λ, then

$$\sum_\lambda f(\lambda) z_\lambda^{-1} p_\lambda = \sum_\lambda s_\lambda = \frac{1}{\prod_i (1-x_i) \cdot \prod_{i<j}(1-x_i x_j)},$$

where p_λ is a power sum symmetric function and z_λ^{-1} is a standard normalizing factor.

Share Cite Improve this answer Follow answered Jun 17, 2020 at 20:48 community wiki

Richard Stanley

Sages conseils

Maybe more than a "trick," but if you want to investigate a sequence $a_0, a_1, \ldots$, then look at a generating function such as $\sum a_n x^n$ or $\sum a_n \frac{x^n}{n!}$. If you are interested in a function $f : \mathrm{Par} \to R$, where R is a commutative ring and Par is the set of all partitions λ of all integers $n \geq 0$, then look at a generating function $\sum_\lambda f(\lambda) N_\lambda b_\lambda$, where $\{b_\lambda\}$ is one of the standard

where p_λ is a power sum symmetric function and z_λ^{-1} is a standard normalizing factor.

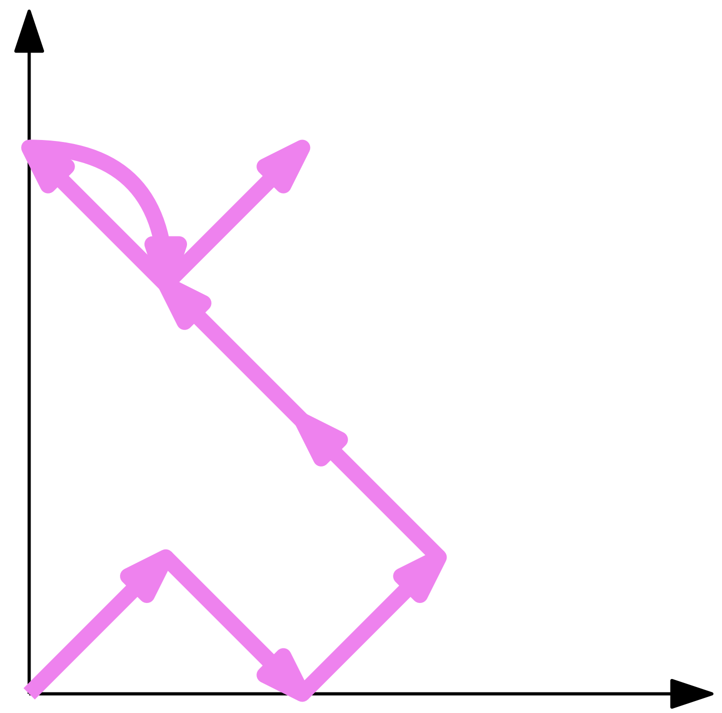
Richard Stanley

Maybe more than a "trick", but if you want to investigate a sequence a_0, a_1, ..., then look at a generating function such as $\sum a_n x^n$ or $\sum a_n \frac{x^n}{n!}$.

Richard Stanley

Série génératrice

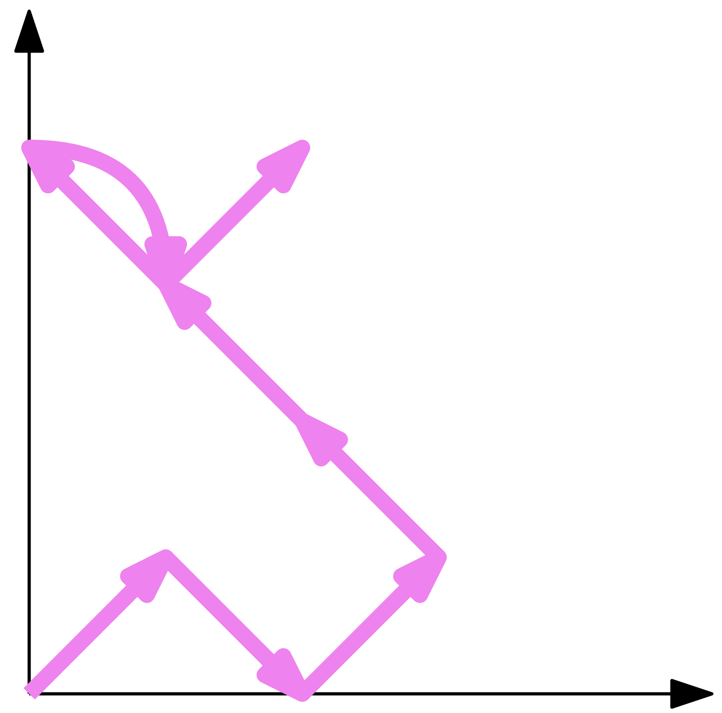
modèle $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^2$ fixé



$$\longrightarrow \qquad x^2 y^4 t^8$$

Série génératrice

modèle $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^2$ fixé



$$x^2 y^4 t^8$$

$$Q(x,y) := \sum_{marche} x^i y^j t^n \in \mathbb{Q}[x,y][[t]]$$

Équation fonctionnelle

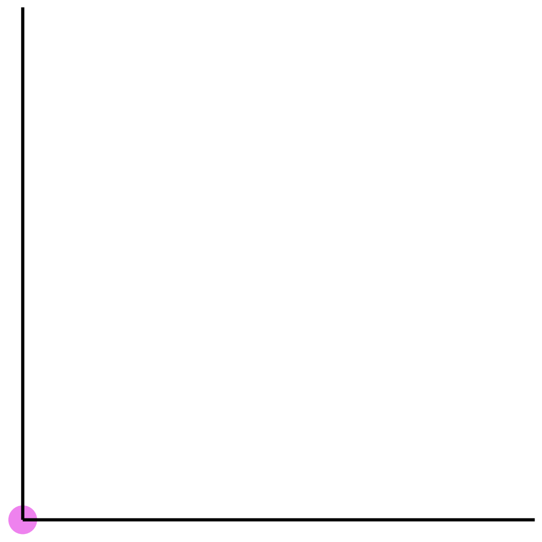
Exemple Modèle $\mathcal{S} = \{(1,1),(1,-1),(-1,1)\}$

$$\begin{aligned} Q(x,y) &= x^0y^0 + txy \cdot Q(x,y) \\ &\quad + tx/y \cdot \big(Q(x,y) - ([y^0]Q(x,y))\big) \\ &\quad + ty/x \cdot \big(Q(x,y) - ([x^0]Q(x,y))\big) \end{aligned}$$

Équation fonctionnelle

Exemple Modèle $\mathcal{S} = \{(1,1),(1,-1),(-1,1)\}$

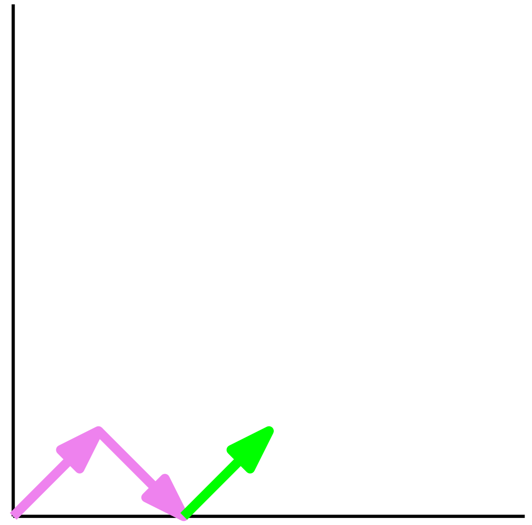
$$\begin{aligned} Q(x,y) &= x^0y^0 + txy \cdot Q(x,y) \\ &+ tx/y \cdot \big(Q(x,y) - ([y^0]Q(x,y))\big) \\ &+ ty/x \cdot \big(Q(x,y) - ([x^0]Q(x,y))\big) \end{aligned}$$



Équation fonctionnelle

Exemple Modèle $\mathcal{S} = \{(1,1), (1,-1), (-1,1)\}$

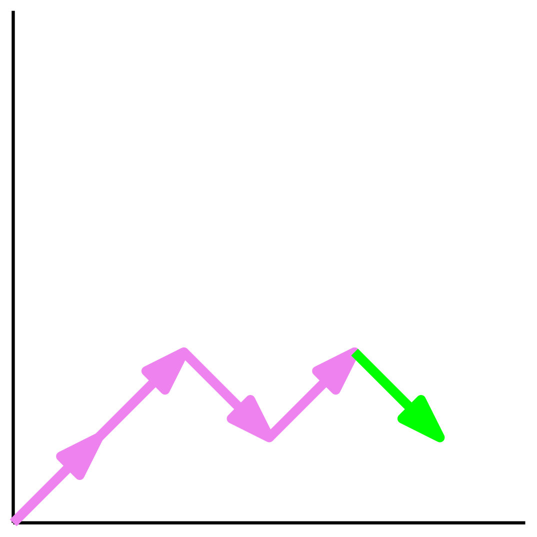
$$\begin{aligned} Q(x,y) &= x^0y^0 + txy \cdot Q(x,y) \\ &+ tx/y \cdot \big(Q(x,y) - ([y^0]Q(x,y))\big) \\ &+ ty/x \cdot \big(Q(x,y) - ([x^0]Q(x,y))\big) \end{aligned}$$



Équation fonctionnelle

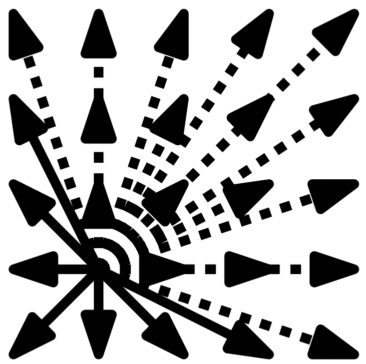
Exemple Modèle $\mathcal{S} = \{(1,1), (1,-1), (-1,1)\}$

$$\begin{aligned} Q(x,y) = x^0y^0 &+ txy \cdot Q(x,y) \\ &+ tx/y \cdot \big(Q(x,y) - ([y^0]Q(x,y))\big) \\ &+ ty/x \cdot \big(Q(x,y) - ([x^0]Q(x,y))\big) \end{aligned}$$



Équation aux variables catalytiques

Cas particulier : petits pas arrière

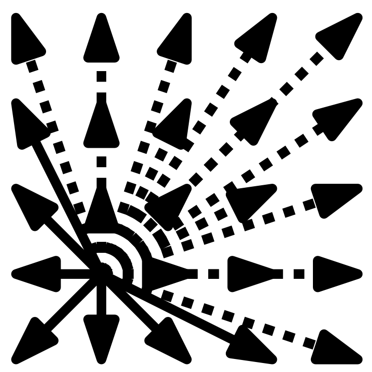
$\mathcal{S} \subset$ 

$$S(x,y) = \sum_{(i,j)\in\mathcal{S}} x^i y^j \text{ et } K(x,y) = 1 - tS(x,y)$$

$$xyK(x,y)Q(x,y) = xy + ta(x)Q(x,0) + tb(y)Q(0,y) + tcQ(0,0)$$

Équation aux variables catalytiques

Cas particulier : petits pas arrière

$\mathcal{S} \subset$ 

$$S(x,y) = \sum_{(i,j)\in\mathcal{S}} x^i y^j \text{ et } K(x,y) = 1 - tS(x,y)$$

$$xyK(x,y)Q(x,y) = xy + ta(x)Q(x,0) + tb(y)Q(0,y) + tcQ(0,0)$$

Classification structurelle

$Q(x, y)$ la série des chemins est-elle :

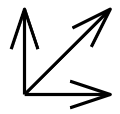
Classification structurelle

$Q(x, y)$ la série des chemins est-elle :

Rationnelle ?

$$Q(x, y) = P_1(x, y, t)/P_2(x, y, t)$$

ex: $Q(x, y) = 1/(1 - t(x + y + xy))$

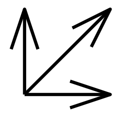


Classification structurelle

$Q(x,y)$ la série des chemins est-elle :

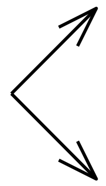
Rationnelle ? $Q(x,y) = P_1(x,y,t)/P_2(x,y,t)$

ex: $Q(x,y) = 1/(1-t(x+y+xy))$



Algébrique ? $P(x,y,t,Q(x,y)) = 0$

ex: $Q(x,y) = 1/(1-txy\frac{1-\sqrt{1-4t^2x^2}}{2t^2x^2})$

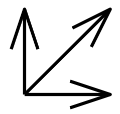


Classification structurelle

$Q(x, y)$ la série des chemins est-elle :

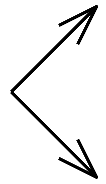
Rationnelle ? $Q(x, y) = P_1(x, y, t)/P_2(x, y, t)$

ex: $Q(x, y) = 1/(1 - t(x + y + xy))$



Algébrique ? $P(x, y, t, Q(x, y)) = 0$

ex: $Q(x, y) = 1/(1 - txy\frac{1-\sqrt{1-4t^2x^2}}{2t^2x^2})$



D-finie ? $P_z(x, y, t, \partial_z)(Q(x, y)) = 0 \ \forall z \in \{x, y, t\}$

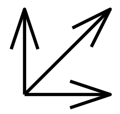
Classification structurelle

$Q(x,y)$ la série des chemins est-elle :

Rationnelle ?

$$Q(x,y) = P_1(x,y,t)/P_2(x,y,t)$$

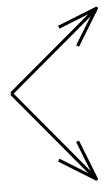
ex: $Q(x,y) = 1/(1 - t(x+y+xy))$



Algébrique ?

$$P(x,y,t,Q(x,y)) = 0$$

ex: $Q(x,y) = 1/(1 - txy\frac{1-\sqrt{1-4t^2x^2}}{2t^2x^2})$



D-finie ?

$$P_z(x,y,t,\partial_z)(Q(x,y)) = 0 \ \forall z \in \{x,y,t\}$$

D-algébrique ?

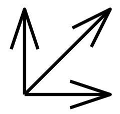
$$P_z(x,y,t,Q(x,y),\partial_z Q(x,y),\dots) = 0 \ \forall z \in \{x,y,t\}$$

Classification structurelle

$Q(x, y)$ la série des chemins est-elle :

Rationnelle ? $\quad Q(x, y) = P_1(x, y, t)/P_2(x, y, t)$

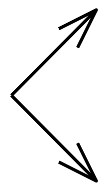
ex: $Q(x, y) = 1/(1 - t(x + y + xy))$



$\cap$

Algébrique ? $\quad P(x, y, t, Q(x, y)) = 0$

ex: $Q(x, y) = 1/(1 - txy\frac{1-\sqrt{1-4t^2x^2}}{2t^2x^2})$



$\cap$

D-finie ? $\quad P_z(x, y, t, \partial_z)(Q(x, y)) = 0 \ \forall z \in \{x, y, t\}$

$\cap$

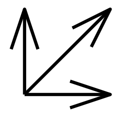
D-algébrique ? $\quad P_z(x, y, t, Q(x, y), \partial_z Q(x, y), \dots) = 0 \ \forall z \in \{x, y, t\}$

Classification structurelle

$Q(x,y)$ la série des chemins est-elle :

Rationnelle ? $Q(x,y) = P_1(x,y,t)/P_2(x,y,t)$

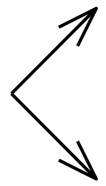
ex: $Q(x,y) = 1/(1-t(x+y+xy))$



$\cap$

Algébrique ? $P(x,y,t,Q(x,y)) = 0$

ex: $Q(x,y) = 1/(1-txy\frac{1-\sqrt{1-4t^2x^2}}{2t^2x^2})$



$\cap$

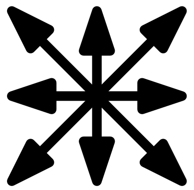
D-finie ? $P_z(x,y,t,\partial_z)(Q(x,y)) = 0 \ \forall z \in \{x,y,t\}$

$\cap$

D-algébrique ? $P_z(x,y,t,Q(x,y),\partial_z Q(x,y),\dots) = 0 \ \forall z \in \{x,y,t\}$

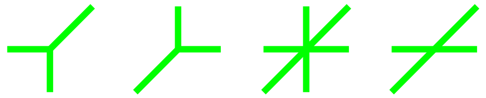
Hypertranscendante ?

Chemins à petits pas, 2008–2018

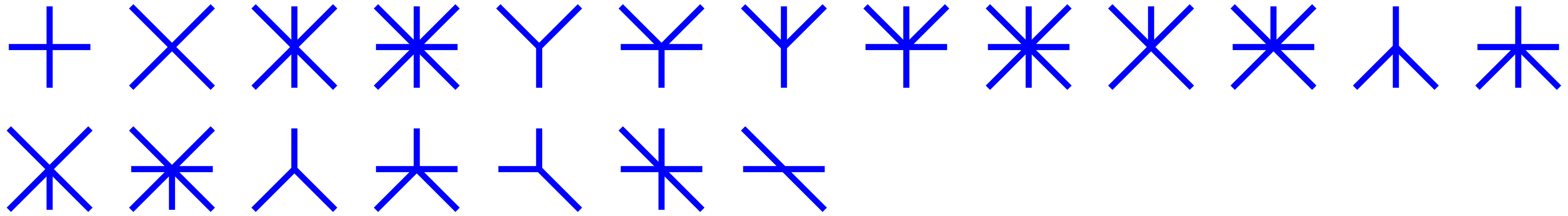


$$xyK(x,y)Q(x,y) = xy + a(x)Q(x,0) + b(y)Q(0,y) + ctQ(0,0)$$

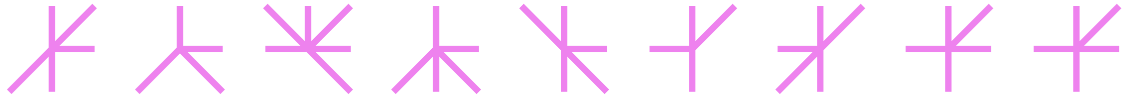
Algébriques



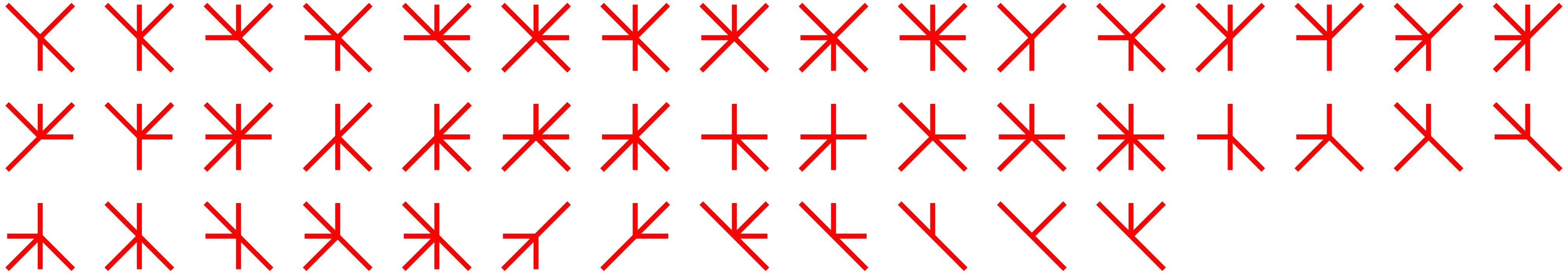
Différentiellement finis



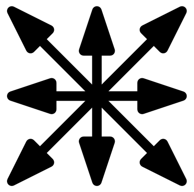
Différentiellement algébriques



Hypertranscendants



Chemins à petits pas, 2008–2018



$$xyK(x,y)Q(x,y) = xy + a(x)Q(x,0) + b(y)Q(0,y) + ctQ(0,0)$$

Algébriques

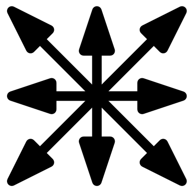
Différentiellement finis

Différentiellement algébriques

Hypertranscendants

Melczer
Bousquet-Mélou
Mishna
Salvy
Bostan
Zeilberger
Kauers
Rechnitzer
Kurkova
Wachtel
Fayolle
Raschel
Denisov
Hardouin
Singer
Dreyfus
Roques

Chemins à petits pas, 2008–2018



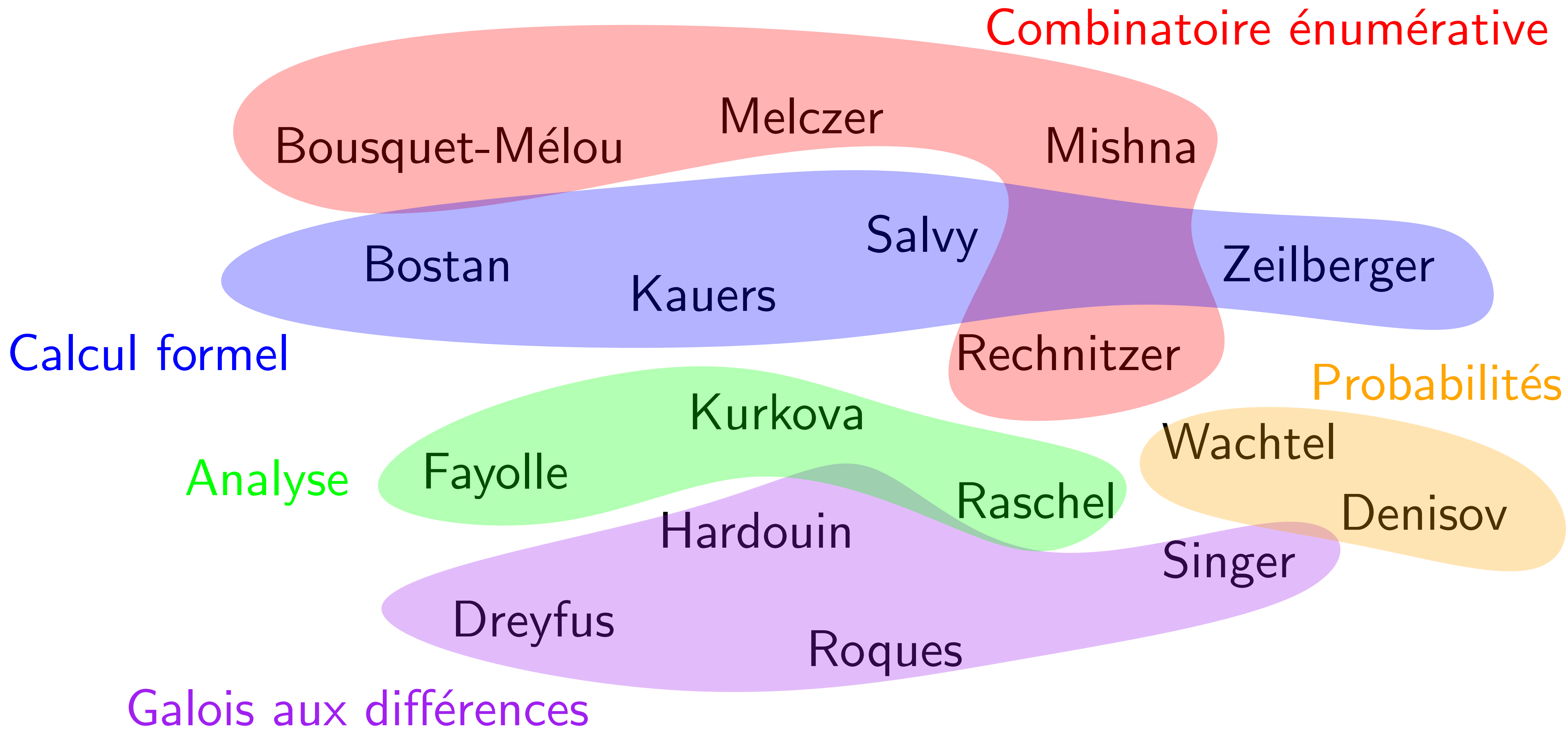
$$xyK(x,y)Q(x,y) = xy + a(x)Q(x,0) + b(y)Q(0,y) + ctQ(0,0)$$

Algébriques

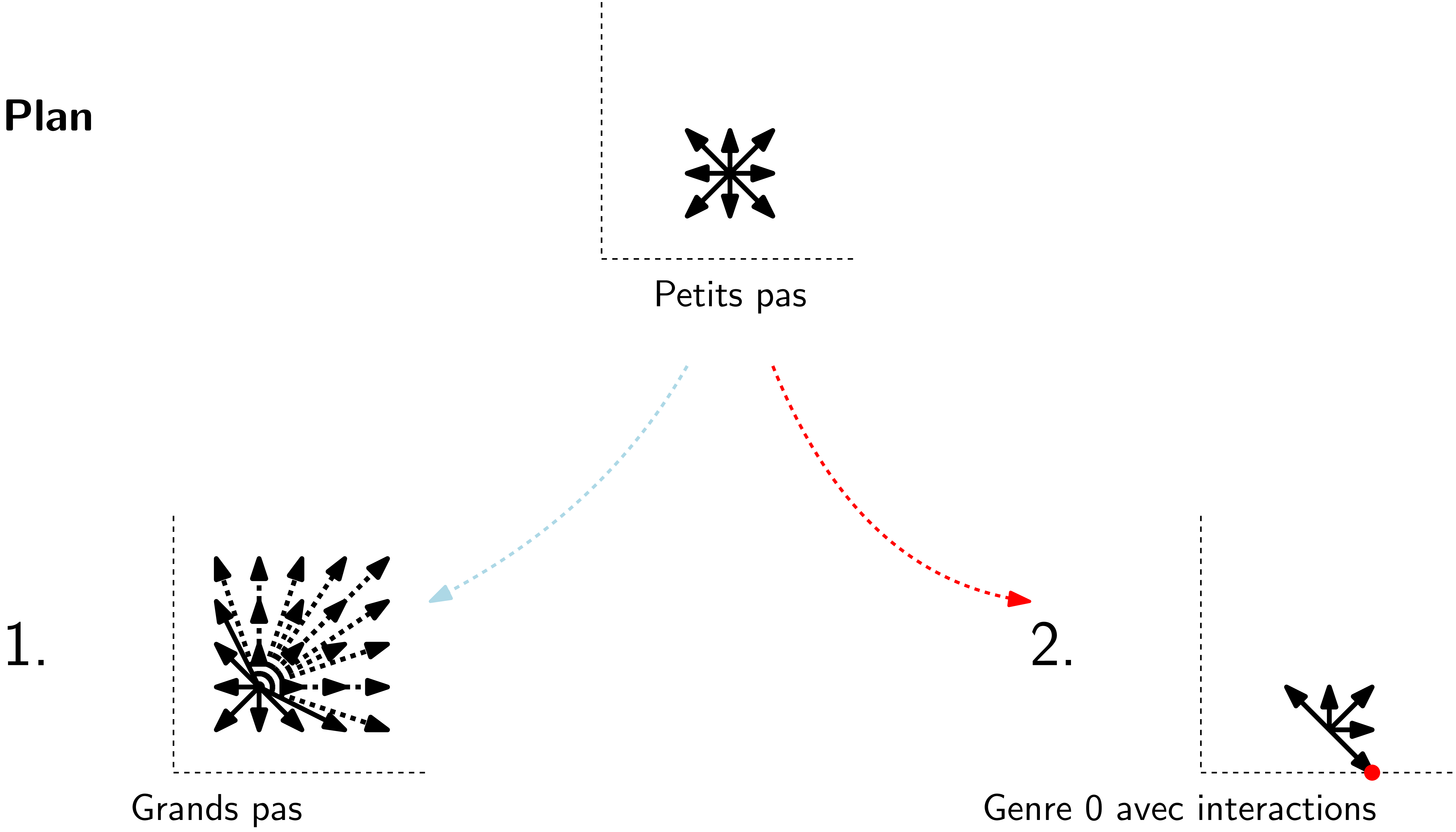
Différentiellement finis

Différentiellement algébriques

Hypertranscendants

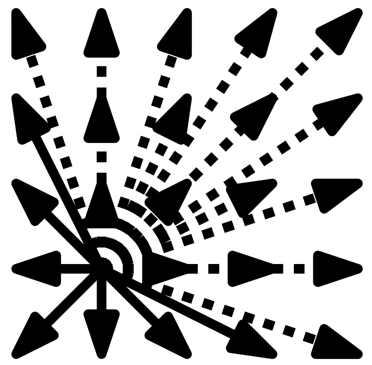


Plan



1. Chemins à grands pas

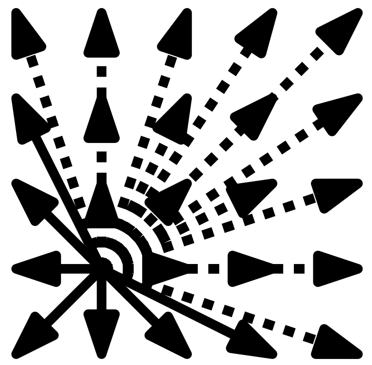
Équation fonctionnelle

$\mathcal{S} \subset$ 

Cas particulier : petits pas arrière partant du point (i_0, j_0)

$$xyK(x,y)Q(x,y) = x^{i_0+1}y^{j_0+1} + a(x)Q(x,0) + b(y)Q(0,y) + ctQ(0,0)$$

Équation fonctionnelle

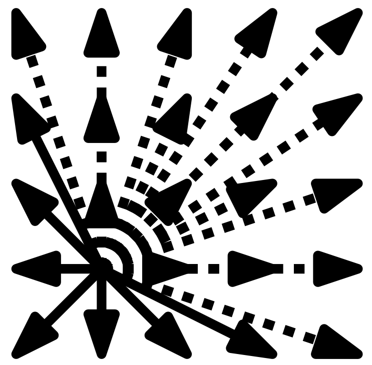
$\mathcal{S} \subset$ 

Cas particulier : petits pas arrière partant du point (i_0, j_0)

$$xyK(x,y)Q(x,y) = x^{i_0+1}y^{j_0+1} + a(x)Q(x,0) + b(y)Q(0,y) + ctQ(0,0)$$

$$xyK(x,y)Q(x,y) = x^{i_0+1}y^{j_0+1} + A(x) + B(y)$$

Équation fonctionnelle

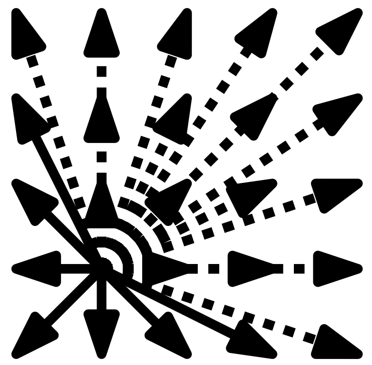
$\mathcal{S} \subset$ 

Cas particulier : petits pas arrière partant du point (i_0, j_0)

$$xyK(x,y)Q(x,y) = x^{i_0+1}y^{j_0+1} + a(x)Q(x,0) + b(y)Q(0,y) + ctQ(0,0)$$

$$xyK(x,y)Q(x,y) = x^{i_0+1}y^{j_0+1} + A(x) + B(y)$$

Équation fonctionnelle

$\mathcal{S} \subset$ 

Cas particulier : petits pas arrière partant du point (i_0, j_0)

$$xyK(x,y)Q(x,y) = x^{i_0+1}y^{j_0+1} + a(x)Q(x,0) + b(y)Q(0,y) + ctQ(0,0)$$

$$xyK(x,y)Q(x,y) = x^{i_0+1}y^{j_0+1} + A(x) + B(y)$$

$\Rightarrow$ Stratégie d'algébricité de **Bernardi, Bousquet-Mélou, Raschel 21**

Équations d'une variable catalytique

Théorème [Popescu 86; Bousquet-Mélou, Jehanne 05] Une équation de la forme

$$F(x,t) = B(x) + tP(x,t,F(x,t),[x^0]F(x,t),[x^1]F(x,t),\dots,[x^{r-1}]F(x,t))$$

(avec B et P des polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$)

admet une unique solution $F(x,t) \in \mathbb{C}(x)[[t]]$.

De plus, $F(x,t)$ est algébrique sur $\mathbb{C}(x,t)$.

Équations d'une variable catalytique

Théorème [Popescu 86; Bousquet-Mélou, Jehanne 05] Une équation de la forme

$$F(x,t) = B(x) + tP(x,t,F(x,t),[x^0]F(x,t),[x^1]F(x,t),\dots,[x^{r-1}]F(x,t))$$

(avec B et P des polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$)

admet une unique solution $F(x,t) \in \mathbb{C}(x)[[t]]$.

De plus, $F(x,t)$ est algébrique sur $\mathbb{C}(x,t)$.

Exemple : Une série $F(x,t)$ de chemins dans un demi plan vérifie une équation de la forme

$$F(x,t) = 1 + \sum_i ta_i(x)[x^i]F(x,t) + tP(x)F(x,t)$$

$\Rightarrow F(x,t)$ est algébrique

Invariants de Tutte : du local au global

Invariants de Tutte : du local au global

Soit $K(x, y) = 1 - tS(x, y)$ où $S(x, y)$ vérifie $[x^{-1}]S(x, y) < 0$ et $[y^{-1}]S(x, y) < 0$.

Invariants de Tutte : du local au global

Soit $K(x,y) = 1 - tS(x,y)$ où $S(x,y)$ vérifie $[x^{-1}]S(x,y) < 0$ et $[y^{-1}]S(x,y) < 0$.

Définition [BM23] Soit $A = \mathbb{C}[[x,y,t]][1/x, 1/y, 1/t]$, et $H_1(x,y), H_2(x,y) \in A$. Si

$$H_1 - H_2 = K(x,y)U(x,y) \text{ avec } U(x,y) \in A$$

on écrit $H_1 \equiv H_2$. La relation $\equiv$ est compatible avec $+$, $\times$.

Invariants de Tutte : du local au global

Soit $K(x,y) = 1 - tS(x,y)$ où $S(x,y)$ vérifie $[x^{-1}]S(x,y) < 0$ et $[y^{-1}]S(x,y) < 0$.

Définition [BM23] Soit $A = \mathbb{C}[[x,y,t]][1/x, 1/y, 1/t]$, et $H_1(x,y), H_2(x,y) \in A$. Si

$$H_1 - H_2 = K(x,y)U(x,y) \text{ avec } U(x,y) \in A$$

on écrit $H_1 \equiv H_2$. La relation $\equiv$ est compatible avec $+$, $\times$.

Soient $I(x) \in A$ et $J(y) \in A$ tels que $I(x) \equiv J(y)$, on dit que

$$(I(x), J(y)) \text{ est une } \textbf{paire d'invariants}.$$

Invariants de Tutte : du local au global

Soit $K(x,y) = 1 - tS(x,y)$ où $S(x,y)$ vérifie $[x^{-1}]S(x,y) < 0$ et $[y^{-1}]S(x,y) < 0$.

Définition [BM23] Soit $A = \mathbb{C}[[x,y,t]][1/x, 1/y, 1/t]$, et $H_1(x,y), H_2(x,y) \in A$. Si

$$H_1 - H_2 = K(x,y)U(x,y) \text{ avec } U(x,y) \in A$$

on écrit $H_1 \equiv H_2$. La relation $\equiv$ est compatible avec $+$, $\times$.

Soient $I(x) \in A$ et $J(y) \in A$ tels que $I(x) \equiv J(y)$, on dit que

$(I(x), J(y))$ est une **paire d'invariants**.

Lemme des invariants [BM23; B. 26+] Si $(I(x), J(y))$ est une paire d'invariants avec

$$I(x) = O(x) \qquad J(y) = O(y)$$

alors $I(x) = J(y) = 0$.

Relations entre invariants

Relations entre invariants

$$\boxed{(I_1(x), J_1(y))} = (1/x^{v_1} + \cdots + O(x), 1/y^{v_1'} + \cdots + O(y)) \text{ Inconnus}$$
$$\boxed{(I_2(x), J_2(y))} = (1/x^{v_2} + \cdots + O(x), 1/y^{v_2'} + \cdots + O(y)) \in \mathbb{C}(x,t) \times \mathbb{C}(y,t)$$

Relations entre invariants

$$(I_1(x), J_1(y)) = (1/x^{v_1} + \cdots + O(x), 1/y^{v'_1} + \cdots + O(y)) \text{ Inconnus}$$
$$(I_2(x), J_2(y)) = (1/x^{v_2} + \cdots + O(x), 1/y^{v'_2} + \cdots + O(y)) \in \mathbb{C}(x,t) \times \mathbb{C}(y,t)$$

Théorème [B. 26+] Il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[[t]][X, Y]$ non nul tel que

$$I_3(x) := P(I_1(x), I_2(x)) = O(x) \quad \text{et} \quad J_3(y) := P(J_1(y), J_2(y)) = O(y)$$

Relations entre invariants

$$(I_1(x), J_1(y)) = (1/x^{v_1} + \cdots + O(x), 1/y^{v_1'} + \cdots + O(y)) \quad \text{Inconnus}$$
$$(I_2(x), J_2(y)) = (1/x^{v_2} + \cdots + O(x), 1/y^{v_2'} + \cdots + O(y)) \in \mathbb{C}(x,t) \times \mathbb{C}(y,t)$$

Théorème [B. 26+] Il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[[t]][X,Y]$ non nul tel que

$$I_3(x) := P(I_1(x), I_2(x)) = O(x) \quad \text{et} \quad J_3(y) := P(J_1(y), J_2(y)) = O(y)$$

$\Rightarrow$ Par le lemme des invariants, on a

$$P(I_1(x), I_2(x)) = 0 \quad \text{et} \quad P(J_1(y), J_2(y)) = 0$$

Relations entre invariants

$$(I_1(x), J_1(y)) = (1/x^{v_1} + \cdots + O(x), 1/y^{v_1'} + \cdots + O(y)) \quad \text{Inconnus}$$
$$(I_2(x), J_2(y)) = (1/x^{v_2} + \cdots + O(x), 1/y^{v_2'} + \cdots + O(y)) \in \mathbb{C}(x,t) \times \mathbb{C}(y,t)$$

Théorème [B. 26+] Il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[[t]][X,Y]$ non nul tel que

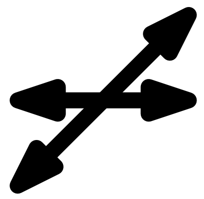
$$I_3(x) := P(I_1(x), I_2(x)) = O(x) \quad \text{et} \quad J_3(y) := P(J_1(y), J_2(y)) = O(y)$$

$\Rightarrow$ Par le lemme des invariants, on a

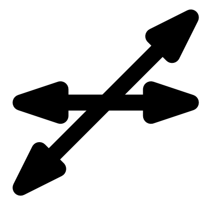
$$P(I_1(x), I_2(x)) = 0 \quad \text{et} \quad P(J_1(y), J_2(y)) = 0$$

$\Rightarrow$ Équations d'une variable catalytique sur $I_1(x)$ et $J_1(y)$

Exemple : modèle de Gessel [BeBMRa 21]

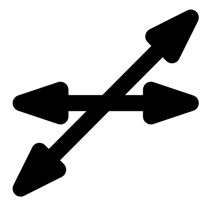


Exemple : modèle de Gessel [BeBMRa 21]



$$xyK(x,y)Q(x,y) = xy - t(y+1)Q(0,y) - tQ(x,0) + tQ(0,0)$$

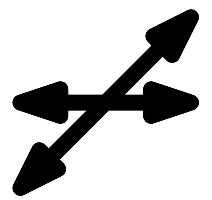
Exemple : modèle de Gessel [BeBMRa 21]



$$xyK(x,y)Q(x,y) = xy - t(y+1)Q(0,y) - tQ(x,0) + tQ(0,0)$$

Découplage : $xy = -\frac{1}{x} + \frac{y}{t(y+1)} - \frac{K(x,y)}{ty(y+1)}$
$(I_1(x), J_1(y)) := (\frac{1}{x} + tQ(x,0) - tQ(0,0), \frac{y}{t(y+1)} - t(y+1)Q(0,y))$

Exemple : modèle de Gessel [BeBMRa 21]



$$xyK(x,y)Q(x,y) = xy - t(y+1)Q(0,y) - tQ(x,0) + tQ(0,0)$$

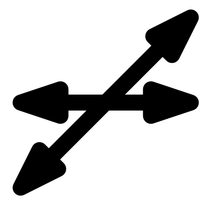
Découplage : $xy = -\frac{1}{x} + \frac{y}{t(y+1)} - \frac{K(x,y)}{ty(y+1)}$

$(I_1(x), J_1(y)) := (\frac{1}{x} + tQ(x,0) - tQ(0,0), \frac{y}{t(y+1)} - t(y+1)Q(0,y))$

Invariants rationnels

$(I_2(x), J_2(y)) := (-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{tx} + 2 + \frac{x}{t} - x^2, \frac{(1+y)^2}{y} + \frac{y}{t^2(1+y)^2})$

Exemple : modèle de Gessel [BeBMRa 21]



$$xyK(x,y)Q(x,y) = xy - t(y+1)Q(0,y) - tQ(x,0) + tQ(0,0)$$

Découplage : $xy = -\frac{1}{x} + \frac{y}{t(y+1)} - \frac{K(x,y)}{ty(y+1)}$

$(I_1(x), J_1(y)) := (\frac{1}{x} + tQ(x,0) - tQ(0,0), \frac{y}{t(y+1)} - t(y+1)Q(0,y))$

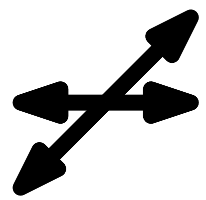
Invariants rationnels

$(I_2(x), J_2(y)) := (-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{tx} + 2 + \frac{x}{t} - x^2, \frac{(1+y)^2}{y} + \frac{y}{t^2(1+y)^2})$

En éliminant les pôles entre $(I_1(x), J_1(y))$ et $(I_2(x), J_2(y))$, puis en appliquant le lemme des invariants, on trouve P_x et P_y à coefficients rationnels tels que

$$P_x(Q(x,0), x, t, [x^0]Q(x,0), [x^1]Q(x,0)) = 0$$
$$P_y(Q(0,y), y, t, [y^0]Q(0,y), [y^1]Q(0,y)) = 0$$

Exemple : modèle de Gessel [BeBMRa 21]



$$xyK(x,y)Q(x,y) = xy - t(y+1)Q(0,y) - tQ(x,0) + tQ(0,0)$$

Découplage : $xy = -\frac{1}{x} + \frac{y}{t(y+1)} - \frac{K(x,y)}{ty(y+1)}$
$(I_1(x), J_1(y)) := (\frac{1}{x} + tQ(x,0) - tQ(0,0), \frac{y}{t(y+1)} - t(y+1)Q(0,y))$

Invariants rationnels
$(I_2(x), J_2(y)) := (-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{tx} + 2 + \frac{x}{t} - x^2, \frac{(1+y)^2}{y} + \frac{y}{t^2(1+y)^2})$

En éliminant les pôles entre $(I_1(x), J_1(y))$ et $(I_2(x), J_2(y))$, puis en appliquant le lemme des invariants, on trouve P_x et P_y à coefficients rationnels tels que

$$P_x(Q(x,0), x, t, [x^0]Q(x,0), [x^1]Q(x,0)) = 0$$
$$P_y(Q(0,y), y, t, [y^0]Q(0,y), [y^1]Q(0,y)) = 0$$

Équations bien fondées + BMJ $\Rightarrow$ $Q(x,0)$ et $Q(0,y)$ sont algébriques $\Rightarrow$ $\boxed{Q(x,y) \text{ est algébrique}}$

Groupe des petits pas [Bousquet-Mélou, Mishna 06]

$$\mathcal{G} := < \Psi, \Phi >$$

avec Ψ et Φ involutions vérifiant

- $\Psi(u, v) = (u, v')$ et $\Phi(u, v) = (u', v)$
- $S(\Psi(u, v)) = S(\Phi(u, v)) = S(u, v)$

Groupe des petits pas [Bousquet-Mélou, Mishna 06]

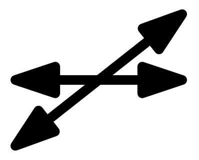
$$\mathcal{G} := < \Psi, \Phi >$$

avec Ψ et Φ involutions vérifiant

- $\Psi(u,v) = (u,v')$ et $\Phi(u,v) = (u',v)$
- $S(\Psi(u,v)) = S(\Phi(u,v)) = S(u,v)$

Exemple

$$\begin{tikzcd}
& (x,y) \arrow[dl, dash, "\Psi"'] \arrow[dr, dash, "\Phi"] & \\
(x,\overline{y}\,\overline{x}^2) \arrow[d, dash, "\Phi"'] & & (\overline{x}\,\overline{y},y) \arrow[d, dash, "\Psi"] \\
(xy,\overline{y}\,\overline{x}^2) \arrow[d, dash, "\Psi"'] & & (\overline{x}\,\overline{y},x^2y) \arrow[d, dash, "\Phi"] \\
(xy,\overline{y}) \arrow[dr, dash, "\Phi"'] & & (\overline{x},x^2y) \arrow[dl, dash, "\Psi"] \\
& (\overline{x},\overline{y}) &
\end{tikzcd}$$



$$\Psi(u,v) = (u,\overline{v}\,\overline{u}^2)$$

$$\Phi(u,v) = (\overline{u}\,\overline{v},v)$$

Groupe des petits pas [Bousquet-Mélou, Mishna 06]

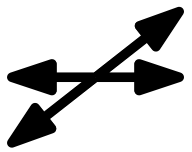
$$\mathcal{G} := < \Psi, \Phi >$$

avec Ψ et Φ involutions vérifiant

- $\Psi(u,v) = (u, v')$ et $\Phi(u,v) = (u', v)$
- $S(\Psi(u,v)) = S(\Phi(u,v)) = S(u,v)$

Exemple

$$\begin{array}{ccc} & (x,y) & \\ \Psi \swarrow & & \searrow \Phi \\ (x, \overline{y}\,\overline{x}^2) & & (\overline{x}\,\overline{y}, y) \\ \Phi \,| & & |\, \Psi \\ (xy, \overline{y}\,\overline{x}^2) & & (\overline{x}\,\overline{y}, x^2 y) \\ \Psi \,| & & |\, \Phi \\ (xy, \overline{y}) & & (\overline{x}, x^2 y) \\ \Phi \searrow & & \swarrow \Psi \\ & (\overline{x}, \overline{y}) & \end{array}$$



$$\Psi(u,v) = (u, \overline{v}\,\overline{u}^2)$$

$$\Phi(u,v) = (\overline{u}\,\overline{v}, v)$$

Découplage

Soit $H(x,y) \in \mathbb{C}(x,y,t)$ une fraction, $H(x,y)$ découple si et seulement si $H(x,y) - H(\overline{xy}, y) + H(\overline{xy}, x^2 y) \cdots \equiv 0$

Groupe des petits pas [Bousquet-Mélou, Mishna 06]

$$\mathcal{G} := < \Psi, \Phi >$$

avec Ψ et Φ involutions vérifiant

- $\Psi(u,v) = (u, v')$ et $\Phi(u,v) = (u', v)$
- $S(\Psi(u,v)) = S(\Phi(u,v)) = S(u,v)$

Exemple

(x, y)

Ψ Φ

$(x, \overline{y}\,\overline{x}^2)$ $(\overline{x}\,\overline{y}, y)$

Φ Ψ

$(xy, \overline{y}\,\overline{x}^2)$ $(\overline{x}\,\overline{y}, x^2y)$

Ψ Φ

$(xy, \overline{y})$ $(\overline{x}, x^2y)$

Φ Ψ

$(\overline{x}, \overline{y})$

$$\Psi(u,v) = (u, \overline{v}\,\overline{u}^2)$$

$$\Phi(u,v) = (\overline{u}\,\overline{v}, v)$$

Découplage

Soit $H(x,y) \in \mathbb{C}(x,y,t)$ une fraction,
$H(x,y)$ découple si et seulement si
$H(x,y) - H(\overline{xy}, y) + H(\overline{xy}, x^2y) \cdots \equiv 0$

Invariants rationnels

Soit $R(x,y) := x^2 + \overline{xy}^2 + \overline{x}^2 + x^2y^2$

alors $R(x,y) \equiv I_1(x)$ et $R(x,y) \equiv J_2(y)$

paire d'invariants non-constants

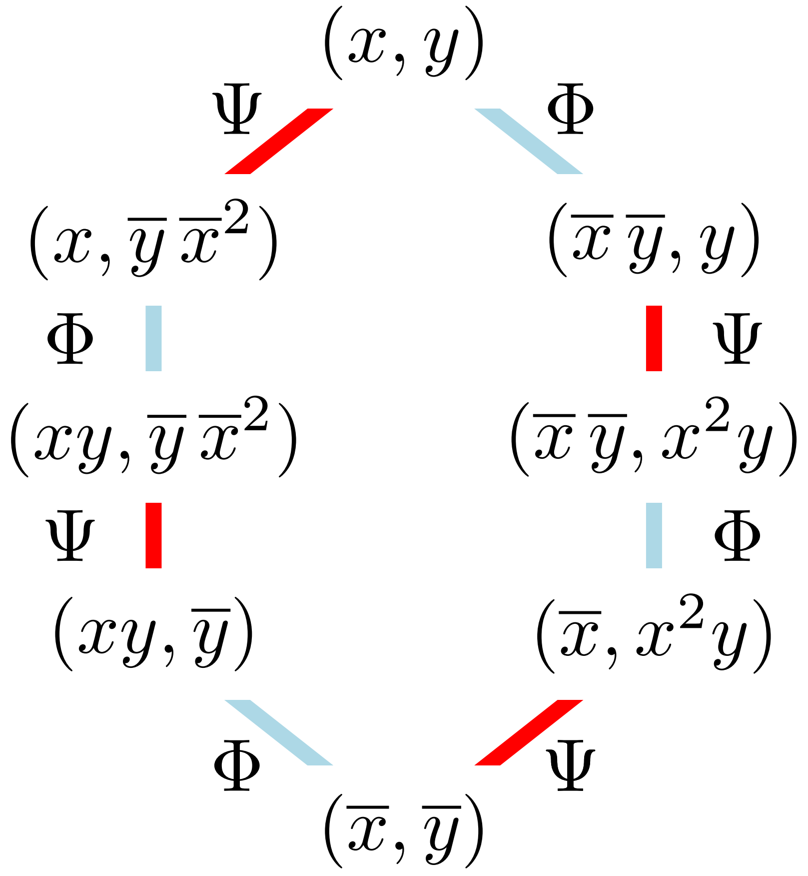
Groupe des petits pas [Bousquet-Mélou, Mishna 06]

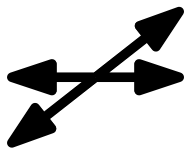
$$\mathcal{G} := < \Psi, \Phi >$$

avec Ψ et Φ involutions vérifiant

- $\Psi(u,v) = (u, v')$ et $\Phi(u,v) = (u', v)$
- $S(\Psi(u,v)) = S(\Phi(u,v)) = S(u,v)$

Exemple





$$\Psi(u,v) = (u, \overline{v}\,\overline{u}^2)$$

$$\Phi(u,v) = (\overline{u}\,\overline{v}, v)$$

Découplage

Soit $H(x,y) \in \mathbb{C}(x,y,t)$ une fraction, $H(x,y)$ découple si et seulement si $H(x,y) - H(\overline{xy}, y) + H(\overline{xy}, x^2y) \cdots \equiv 0$

Invariants rationnels

Soit $R(x,y) := x^2 + \overline{xy}^2 + \overline{x}^2 + x^2y^2$

alors $R(x,y) \equiv I_1(x)$ et $R(x,y) \equiv J_2(y)$

paire d'invariants non-constants

Preuves reposant sur ce groupe de transformations rationnelles, n'existant a priori que pour les petits pas.

Orbite des grands pas [Bostan, Bousquet-Mélou, Melczer 18]

Orbite des grands pas [Bostan, Bousquet-Mélou, Melczer 18]

$$\mathcal{G} :=< \Psi, \Phi >$$

avec Ψ et Φ involutions vérifiant

- $\Psi(u, v) = (u, v')$ et $\Phi(u, v) = (u', v)$
- $S(\Psi(u, v)) = S(\Phi(u, v)) = S(u, v)$

Orbite des grands pas [Bostan, Bousquet-Mélou, Melczer 18]

$$\mathcal{G} := < \Psi, \Phi >$$

avec Ψ et Φ involutions vérifiant

- $\Psi(u,v) = (u,v')$ et $\Phi(u,v) = (u',v)$
- $S(\Psi(u,v)) = S(\Phi(u,v)) = S(u,v)$

Définition 1 $(u,v) \sim (u',v')$
ssi
$(u',v') = \Psi(u,v)$ ou $(u',v') = \Phi(u,v)$

Orbite des grands pas [Bostan, Bousquet-Mélou, Melczer 18]

$$\mathcal{G} := < \Psi, \Phi >$$

avec Ψ et Φ involutions vérifiant

- $\Psi(u, v) = (u, v')$ et $\Phi(u, v) = (u', v)$
- $S(\Psi(u, v)) = S(\Phi(u, v)) = S(u, v)$

Définition 1 $(u, v) \sim (u', v')$
ssi
$(u', v') = \Psi(u, v)$ ou $(u', v') = \Phi(u, v)$

Définition 2 $(u, v) \sim (u,' v')$
ssi
$S(u, v) = S(u', v')$ et $u = u'$ ou $v = v'$

Orbite des grands pas [Bostan, Bousquet-Mélou, Melczer 18]

$$\mathcal{G} := < \Psi, \Phi >$$

avec Ψ et Φ involutions vérifiant

- $\Psi(u,v) = (u,v')$ et $\Phi(u,v) = (u',v)$
- $S(\Psi(u,v)) = S(\Phi(u,v)) = S(u,v)$

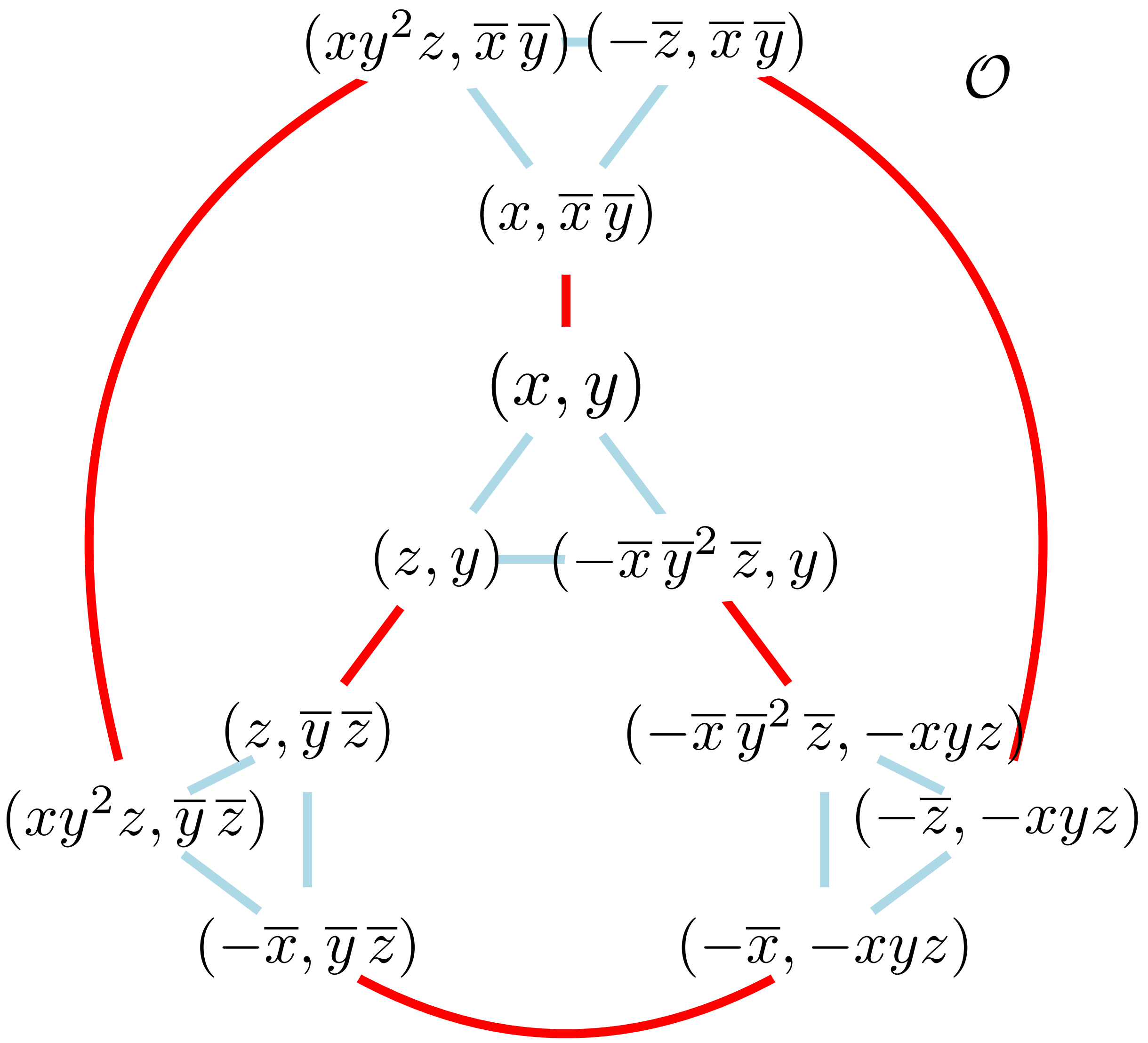
Définition 1 $(u,v) \sim (u',v')$ ssi $(u',v') = \Psi(u,v)$ ou $(u',v') = \Phi(u,v)$	**Définition 2** $(u,v) \sim (u,'v')$ ssi $S(u,v) = S(u',v')$ et $u = u'$ ou $v = v'$

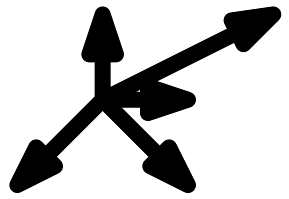
- Requiert un groupe
- $\mathcal{O}$ = Orbite de (x,y) par $\mathcal{G}$

- Ne requiert pas de groupe
- $\mathcal{O}$ = Classe de (x,y) sous $\sim$

Orbite des grands pas [Bostan, Bousquet-Mélou, Melczer 18]

Exemple :





Définition 2 $(u, v) \sim (u,' v')$
ssi
$S(u, v) = S(u', v')$ et $u = u'$ ou $v = v'$

- Ne requiert pas de groupe
- $\mathcal{O}$ = Classe de (x, y) sous $\sim$

Structure galoisienne de l’orbite [B., Hardouin 24]

Structure galoisienne de l'orbite [B., Hardouin 24]

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
& \mathbb{C}(t,\mathcal{O}) \arrow[d] & \\
& \mathbb{C}(t,x,y) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathbb{C}(t,x) \arrow[dr] & & \mathbb{C}(t,y) \arrow[dl] \\
& k_{inv} = \mathbb{C}(t,x) \cap \mathbb{C}(t,y) \arrow[d] & \\
& \mathbb{C}(t) &
\end{tikzcd}$$

$$K(x,y,t) = 0$$

Structure galoisienne de l'orbite [B., Hardouin 24]

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{C}(t,\mathcal{O}) \arrow[ddl, dash, dashed, bend right, "G_x"'] \arrow[ddr, dash, dashed, bend left, "G_y"] \arrow[d, dash] & \\
& \mathbb{C}(t,x,y) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\mathbb{C}(t,x) \arrow[dr, dash] & & \mathbb{C}(t,y) \arrow[dl, dash] \\
& k_{inv} = \mathbb{C}(t,x) \cap \mathbb{C}(t,y) \arrow[d, dash] & \\
& \mathbb{C}(t) &
\end{tikzcd}$$

$$K(x,y,t) = 0$$

$$G := < G_x, G_y >$$

Structure galoisienne de l'orbite [B., Hardouin 24]

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{C}(t,\mathcal{O}) \arrow[d, dash] \arrow[ddl, dash, dashed, bend right, "G_x"'] \arrow[ddr, dash, dashed, bend left, "G_y"] & \\
& \mathbb{C}(t,x,y) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\mathbb{C}(t,x) \arrow[dr, dash] & & \mathbb{C}(t,y) \arrow[dl, dash] \\
& k_{inv} = \mathbb{C}(t,x) \cap \mathbb{C}(t,y) \arrow[d, dash] & \\
& \mathbb{C}(t) &
\end{tikzcd}$$

$$G := < G_x, G_y >$$

$$K(x,y,t) = 0$$

Théorème [B., Hardouin 24] Le groupe G agit sur $\mathcal{O}$ par automorphismes de graphes

$$\sigma \cdot (u,v) = (\sigma u, \sigma v)$$

Cette action est fidèle, transitive et finiment engendrée.

Invariants rationnels

Invariants rationnels

Théorème [Fried 78; B., Hardouin 24] On a équivalence entre

- Orbite finie
- Groupe fini
- Existence d'invariants rationnels non constants

Invariants rationnels

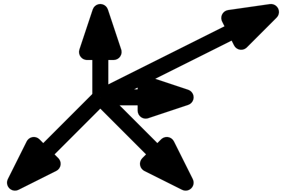
Théorème [Fried 78; B., Hardouin 24] On a équivalence entre

- Orbite finie
- Groupe fini
- Existence d'invariants rationnels non constants

Théorème [B., Hardouin 24]

- Le corps des invariants k_{inv} vaut $\mathbb{C}(t, f(x))$ pour un certain invariant $f(x)$.
- Soit $\mu_x(X) = \prod_{u:(u,v)\in\mathcal{O}}(X-u)$ le polynôme annulateur des coordonnées gauches. Alors tout coefficient non constant de $\mu_x(X)$ engendre k_{inv}.

Invariants rationnels : Exemple



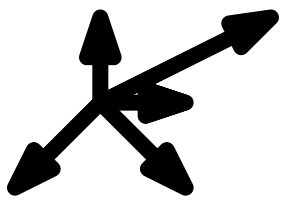
$K(x,y,t)=0$

$$\mu_x(Z) = Z^6 - \frac{\left(x^3+x^6+x^4-x^2-1\right)t^2+x^2\left(x^2-1\right)t-x^3}{t^2x\left(x^2+1\right)^2}Z^5+\frac{t+1}{t}Z^4$$

$$-\,2\frac{x^6t^2+\left(-\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}\right)x^5+t\left(t+1\right)x^4+\left(-t^2-t\right)x^2-\frac{\left(t^2-1\right)x}{2}-t^2}{t^2x\left(x^2+1\right)^2}Z^3-\frac{t+1}{t}Z^2$$

$$-\,\frac{\left(\left(x^3+x^6+\,x^4-x^2-1\right)t^2+x^2\left(x^2-1\right)t-x^3\right)}{t^2x\left(x^2+1\right)^2}Z-1$$

Invariants rationnels : Exemple

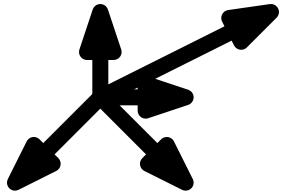


$K(x,y,t)=0$

$$\begin{aligned}\mu_x(Z) = {} & Z^6 - \frac{\left(x^3+x^6+x^4-x^2-1\right)t^2+x^2\left(x^2-1\right)t-x^3}{t^2x\left(x^2+1\right)^2}Z^5+\frac{t+1}{t}Z^4 \\ & -2\frac{x^6t^2+\left(-\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}\right)x^5+t\left(t+1\right)x^4+\left(-t^2-t\right)x^2-\frac{\left(t^2-1\right)x}{2}-t^2}{t^2x\left(x^2+1\right)^2}Z^3-\frac{t+1}{t}Z^2 \\ & -\frac{\left(\left(x^3+x^6+x^4-x^2-1\right)t^2+x^2\left(x^2-1\right)t-x^3\right)}{t^2x\left(x^2+1\right)^2}Z-1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = Z^6-\frac{t\,y^4-ty-y^3-t}{t\,y^2}Z^5+\frac{t+1}{t}Z^4-2\frac{\left(y^4-\frac{1}{2}y^2-y-1\right)t^2-t\,y^3+\frac{y^2}{2}}{t^2y^2}Z^3 \\ & -\frac{(t+1)}{t}Z^2+\frac{\left(-t\,y^4+ty+y^3+t\right)}{t\,y^2}Z-1.\end{aligned}$$

Invariants rationnels : Exemple



$K(x, y, t) = 0$

$$\mu_x(Z) = Z^6 - \frac{\left(x^3 + x^6 + x^4 - x^2 - 1\right) t^2 + x^2 \left(x^2 - 1\right) t - x^3}{t^2 x \left(x^2 + 1\right)^2} Z^5 + \frac{t+1}{t} Z^4$$

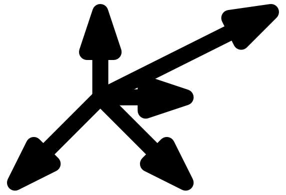
$$- 2 \frac{x^6 t^2 + \left(-\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\right) x^5 + t\,(t+1)\,x^4 + \left(-t^2 - t\right) x^2 - \frac{\left(t^2-1\right)x}{2} - t^2}{t^2 x \left(x^2 + 1\right)^2} Z^3 - \frac{t+1}{t} Z^2$$

$$- \frac{\left(\left(x^3 + x^6 + x^4 - x^2 - 1\right) t^2 + x^2 \left(x^2 - 1\right) t - x^3\right)}{t^2 x \left(x^2 + 1\right)^2} Z - 1$$

$$= Z^6 - \frac{t\,y^4 - ty - y^3 - t}{t\,y^2} Z^5 + \frac{t+1}{t} Z^4 - 2 \frac{\left(y^4 - \frac{1}{2} y^2 - y - 1\right) t^2 - t\,y^3 + \frac{y^2}{2}}{t^2 y^2} Z^3$$

$$- \frac{(t+1)}{t} Z^2 + \frac{\left(-t\,y^4 + ty + y^3 + t\right)}{t\,y^2} Z - 1.$$

Invariants rationnels : Exemple



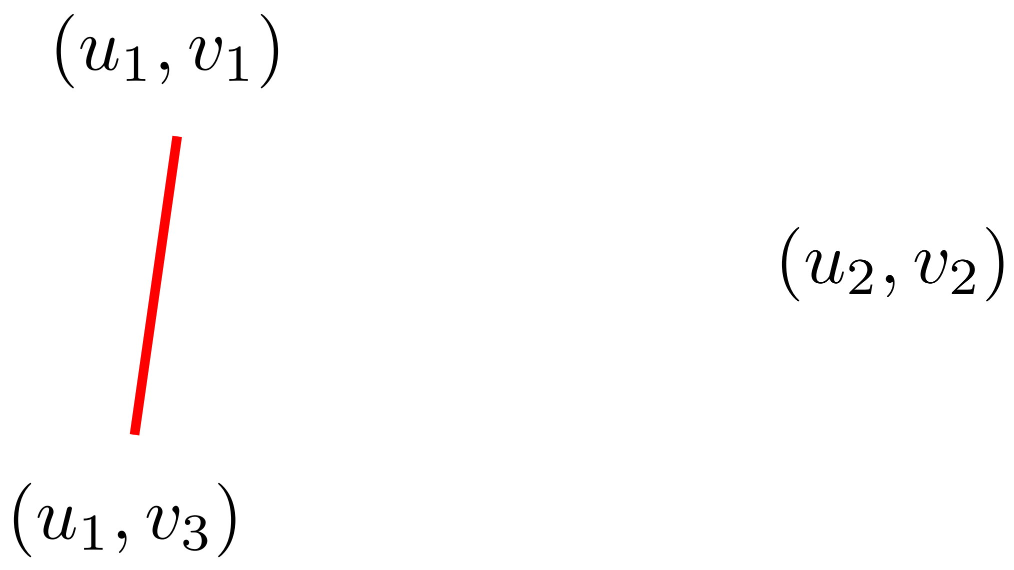
$K(x,y,t)=0$

$$\mu_x(Z) = Z^6 - \frac{\left(x^3+x^6+x^4-x^2-1\right)t^2+x^2\left(x^2-1\right)t-x^3}{t^2x\left(x^2+1\right)^2}Z^5 + \frac{t+1}{t}Z^4$$
$$-2\frac{x^6t^2+\left(-\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}\right)x^5+t\left(t+1\right)x^4+\left(-t^2-t\right)x^2-\frac{\left(t^2-1\right)x}{2}-t^2}{t^2x\left(x^2+1\right)^2}Z^3-\frac{t+1}{t}Z^2$$
$$-\frac{\left(\left(x^3+x^6+x^4-x^2-1\right)t^2+x^2\left(x^2-1\right)t-x^3\right)}{t^2x\left(x^2+1\right)^2}Z-1$$

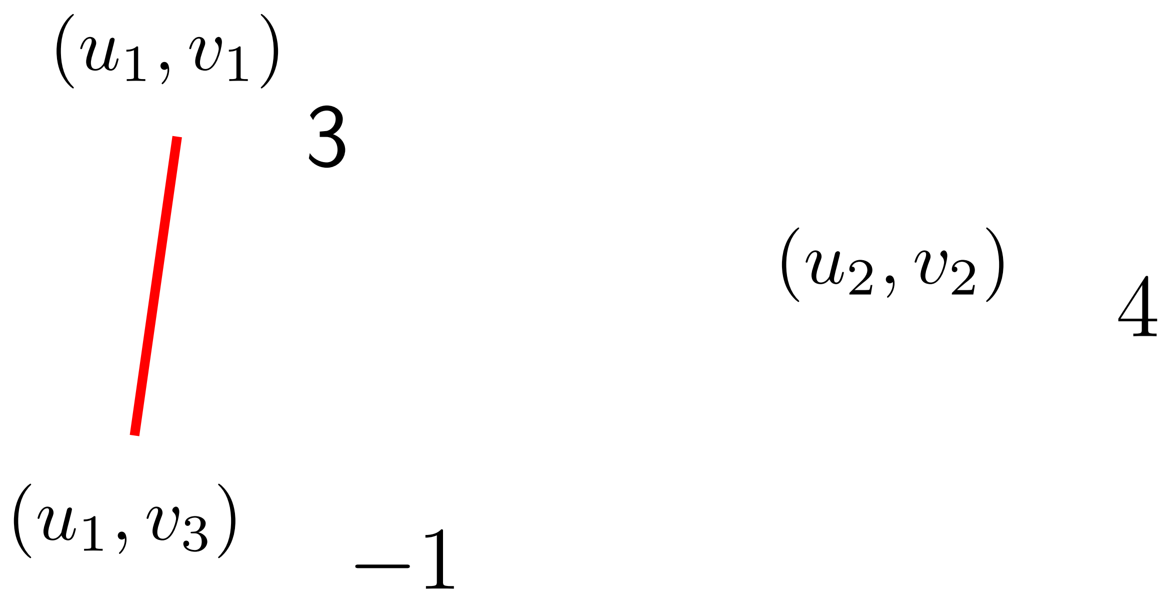
$$= Z^6 - \frac{t\,y^4-ty-y^3-t}{t\,y^2}Z^5 + \frac{t+1}{t}Z^4 - 2\frac{\left(y^4-\frac{1}{2}y^2-y-1\right)t^2-t\,y^3+\frac{y^2}{2}}{t^2y^2}Z^3$$
$$-\frac{(t+1)}{t}Z^2+\frac{\left(-t\,y^4+ty+y^3+t\right)}{t\,y^2}Z-1.$$

Découplage : Évaluation des 0-chaînes

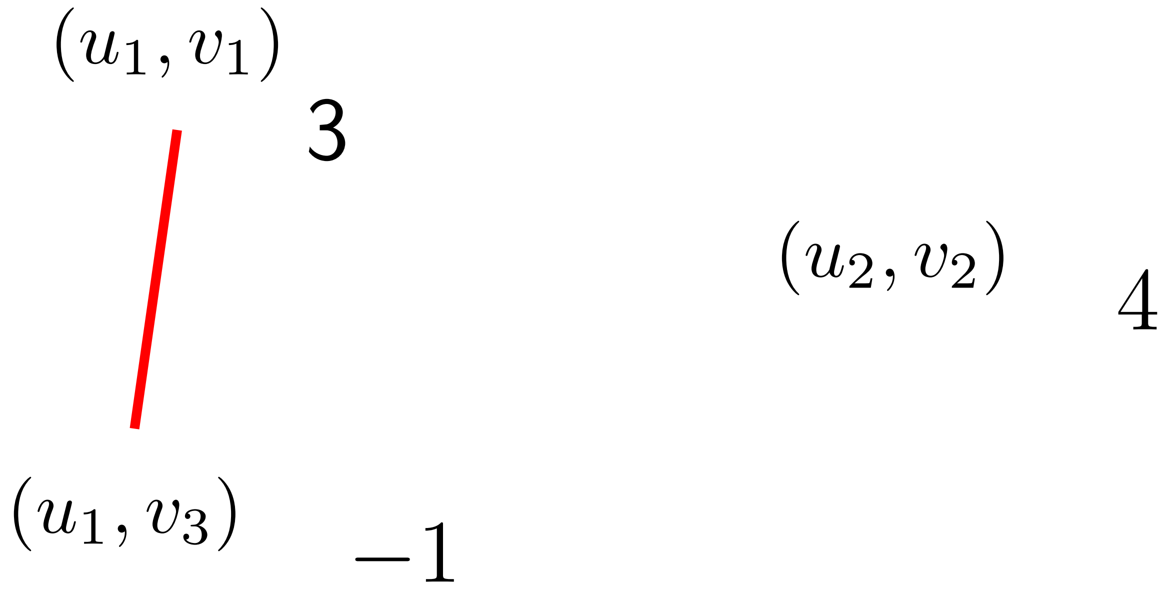
Découplage : Évaluation des 0-chaînes



Découplage : Évaluation des 0-chaînes

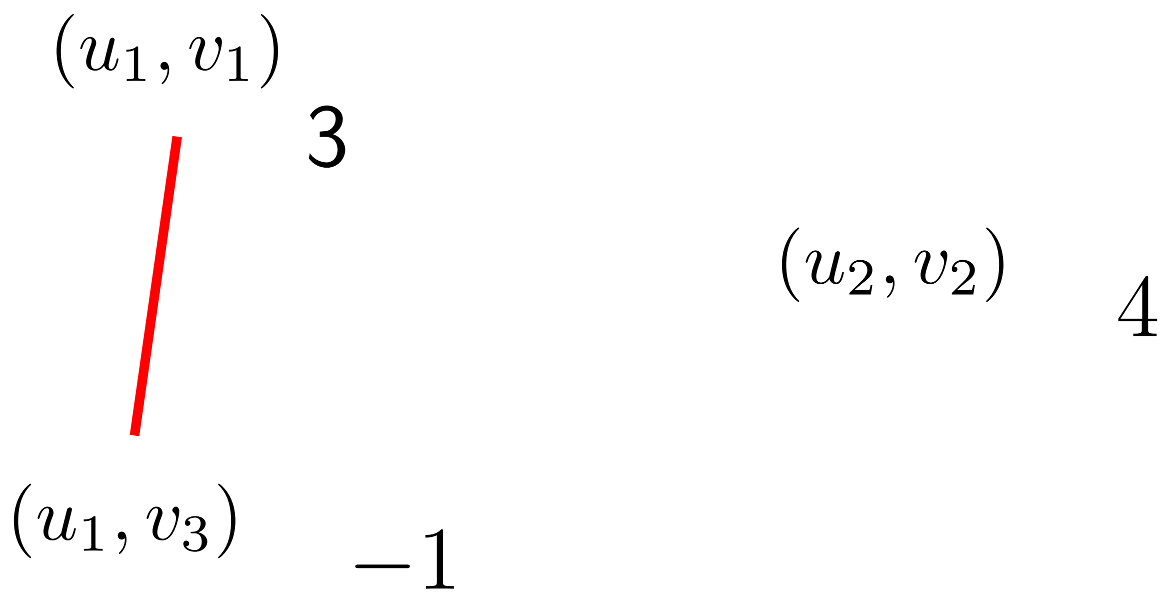


Découplage : Évaluation des 0-chaînes



$$c = 3 \cdot (u_1, v_1) + 4 \cdot (u_2, v_2) - (u_1, v_3)$$

Découplage : Évaluation des 0-chaînes



$$\longrightarrow \quad c = 3\cdot(u_1, v_1) + 4\cdot(u_2, v_2) - (u_1, v_3)$$

Pour $H(x, y)$ une fraction, on définit $H_c \in \mathbb{C}(t, \mathcal{O})$ par linéarité

$$H_c(x, y) = 3 \cdot H(u_1, v_1) + 4 \cdot H(u_2, v_2) - H(u_1, v_3)$$

Caractérisation du découplage

Théorème [B., Hardouin 24]

On peut écrire $(x, y) = \gamma_x + \gamma_y + \alpha$, de sorte que pour $H(x, y) \in \mathbb{C}(t, x, y)$

Caractérisation du découplage

Théorème [B., Hardouin 24]

On peut écrire $(x, y) = \gamma_x + \gamma_y + \alpha$, de sorte que pour $H(x, y) \in \mathbb{C}(t, x, y)$

- H découple ssi $H_\alpha \equiv 0$.

Caractérisation du découplage

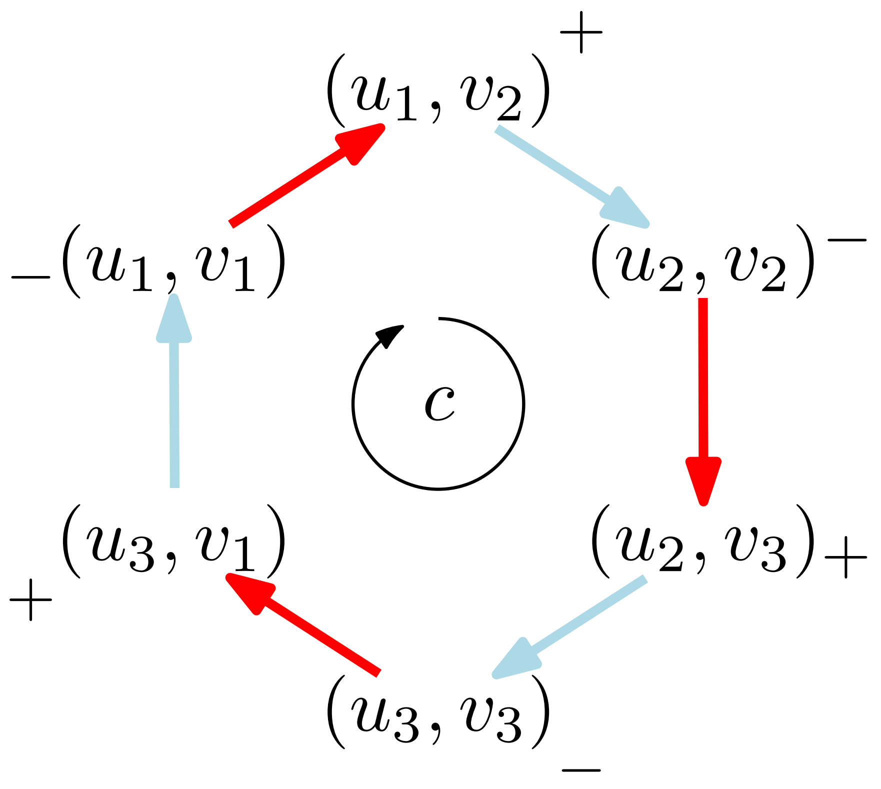
Théorème [B., Hardouin 24]

On peut écrire $(x, y) = \gamma_x + \gamma_y + \alpha$, de sorte que pour $H(x, y) \in \mathbb{C}(t, x, y)$

- H découple ssi $H_\alpha \equiv 0$.
- Si H découple, alors $H(x, y) \equiv H_{\gamma_x} + H_{\gamma_y}$.

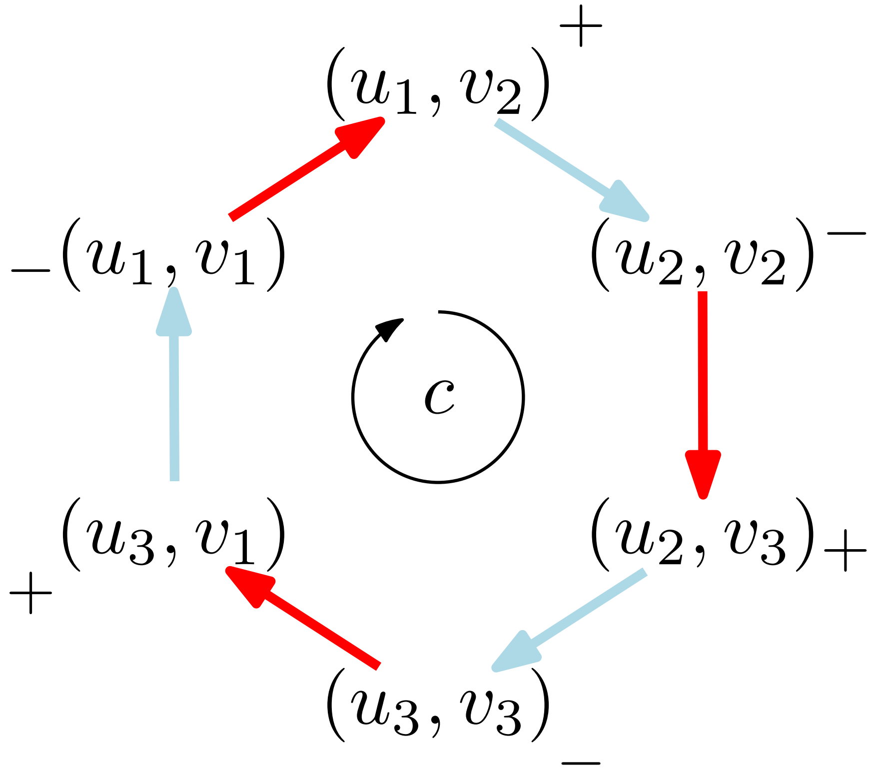
$$\text{avec } H_{\gamma_x} = F(x) \in \mathbb{C}(x, t) \quad \text{et} \quad H_{\gamma_y} = G(y) \in \mathbb{C}(y, t)$$

Construction de α : cycles bicolores



$$c = (u_1, v_2) - (u_1, v_1) + (u_2, v_3) - (u_2, v_2) + (u_3, v_1) - (u_3, v_2)$$

Construction de α : cycles bicolores



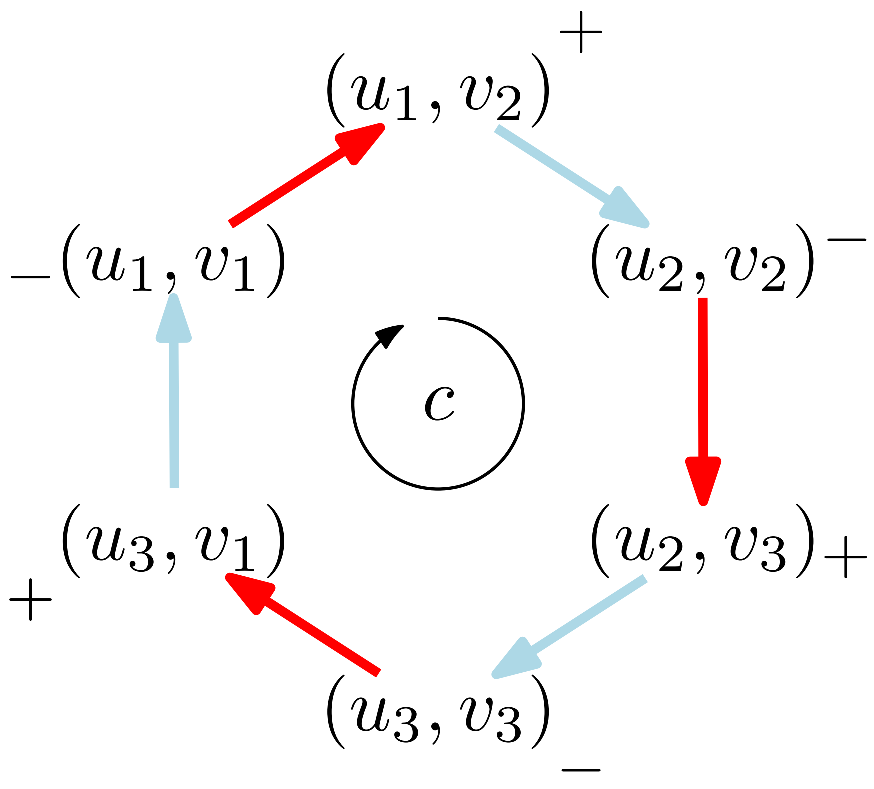
$$c = (u_1, v_2) - (u_1, v_1) + (u_2, v_3) - (u_2, v_2) + (u_3, v_1) - (u_3, v_2)$$

Supposons que $H(x, y) \equiv F(x) + G(y)$

$$F(x)_c = (F(u_1) - F(u_1)) + (F(u_2) - F(u_2)) + (F(u_3) - F(u_3)) = 0$$

$$G(y)_c = (G(v_2) - G(v_2)) + (G(v_3) - G(v_3)) + (G(v_1) - G(v_1)) = 0$$

Construction de α : cycles bicolores



$$c = (u_1, v_2) - (u_1, v_1) + (u_2, v_3) - (u_2, v_2) + (u_3, v_1) - (u_3, v_2)$$

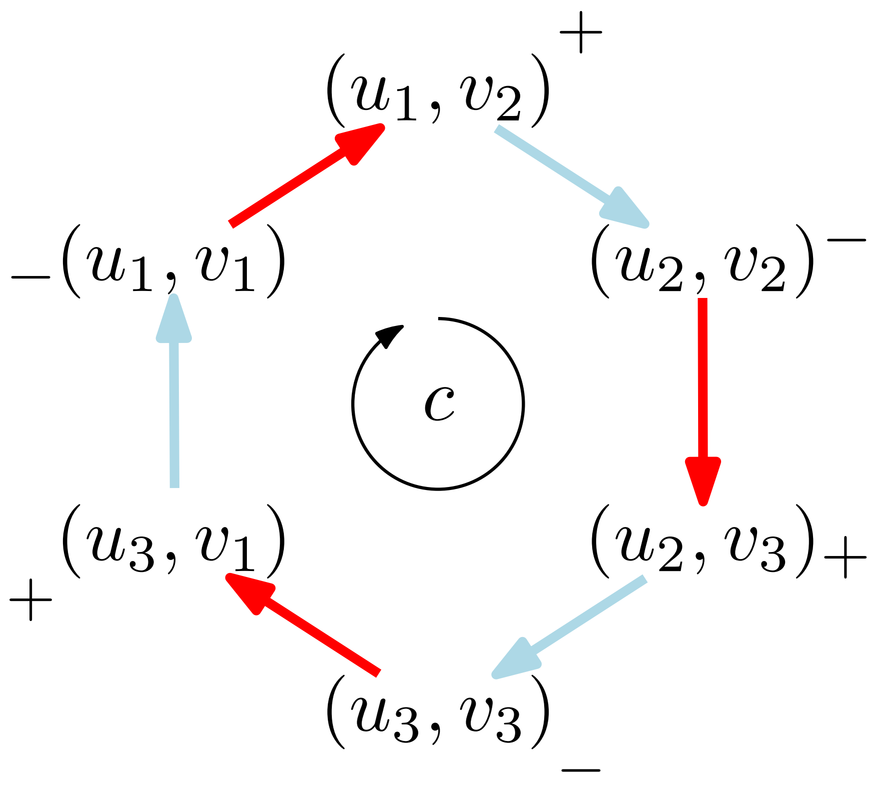
Supposons que $H(x, y) \equiv F(x) + G(y)$

$$F(x)_c = (F(u_1) - F(u_1)) + (F(u_2) - F(u_2)) + (F(u_3) - F(u_3)) = 0$$

$$G(y)_c = (G(v_2) - G(v_2)) + (G(v_3) - G(v_3)) + (G(v_1) - G(v_1)) = 0$$

$\Rightarrow$ si $H(x, y)$ découple, alors $H_c \equiv 0$ pour tous tels c.

Construction de α : cycles bicolores



$$c = (u_1, v_2) - (u_1, v_1) + (u_2, v_3) - (u_2, v_2) + (u_3, v_1) - (u_3, v_2)$$

Supposons que $H(x, y) \equiv F(x) + G(y)$

$$F(x)_c = (F(u_1) - F(u_1)) + (F(u_2) - F(u_2)) + (F(u_3) - F(u_3)) = 0$$

$$G(y)_c = (G(v_2) - G(v_2)) + (G(v_3) - G(v_3)) + (G(v_1) - G(v_1)) = 0$$

$\Rightarrow$ si $H(x, y)$ découple, alors $H_c \equiv 0$ pour tous tels c.

α est une combinaison linéaire de tels c

Construction de $\gamma_{\mathbf{x}}$ et $\gamma_{\mathbf{y}}$: traces

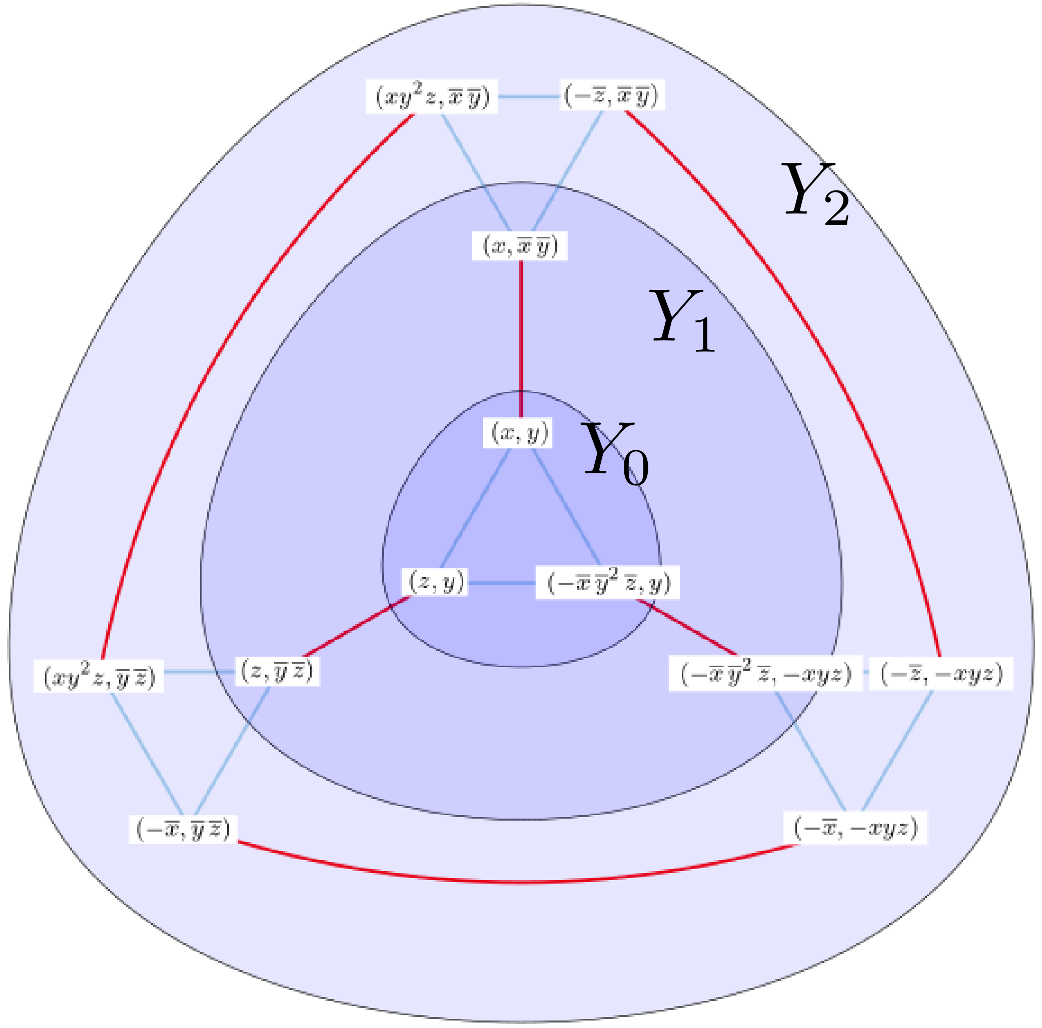
Proposition Soient $\sigma \in G$, c une 0-chaîne et $H(x,y) \in \mathbb{C}(t,x,y)$. Alors

$$\sigma \cdot H_c = H_{\sigma \cdot c}$$

Construction de $\gamma_{\mathbf{x}}$ et $\gamma_{\mathbf{y}}$: traces

Proposition Soient $\sigma \in G$, c une 0-chaîne et $H(x, y) \in \mathbb{C}(t, x, y)$. Alors

$$\sigma \cdot H_c = H_{\sigma \cdot c}$$

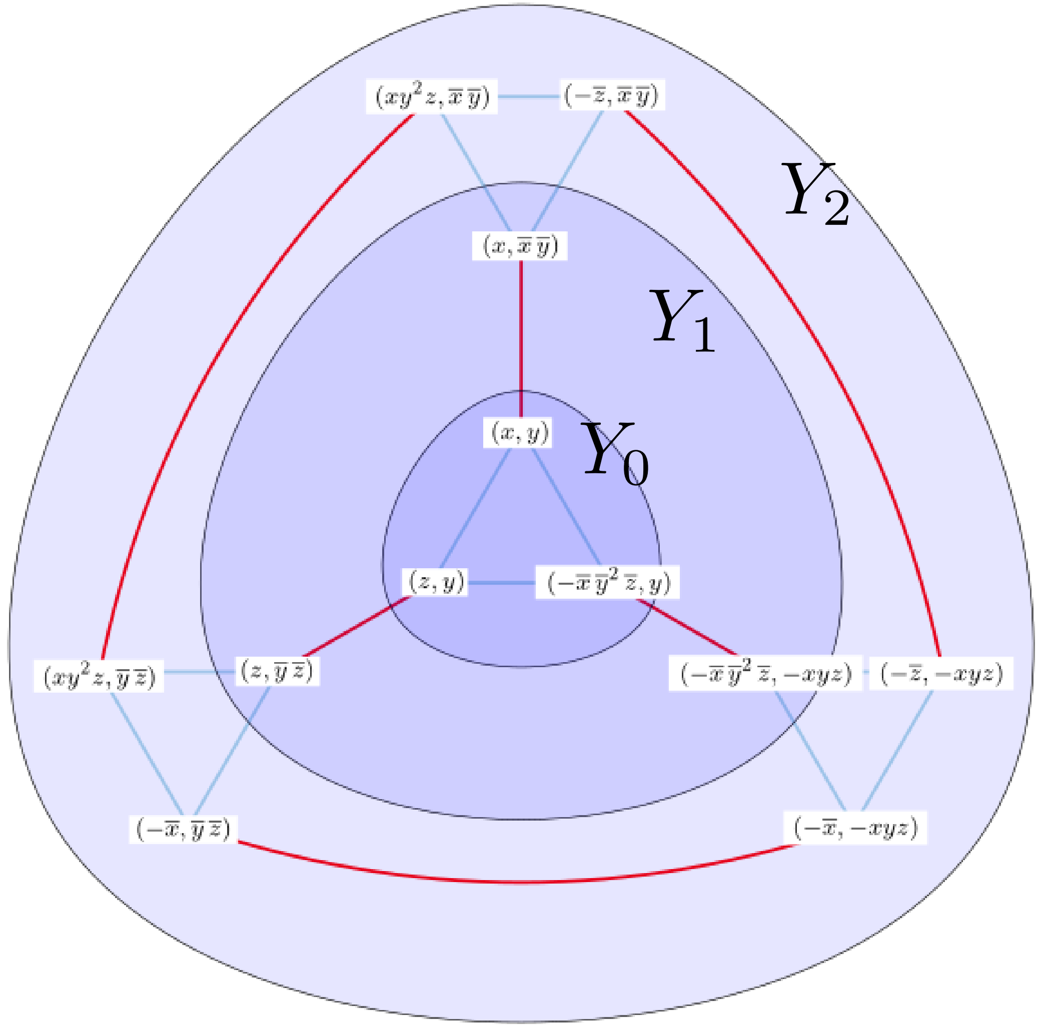


$$Y_0 := \sum_{\sigma \in G_y} \sigma \cdot (x, y) \qquad Y_1 := \sum_{\sigma \in G_y} \sigma \cdot (x, y_1)$$
$$Y_2 = \sum_{\sigma \in G} \sigma \cdot (x_4, y_1)$$

Construction de $\gamma_{\mathbf{x}}$ et $\gamma_{\mathbf{y}}$: traces

Proposition Soient $\sigma \in G$, c une 0-chaîne et $H(x,y) \in \mathbb{C}(t,x,y)$. Alors

$$\sigma \cdot H_c = H_{\sigma \cdot c}$$



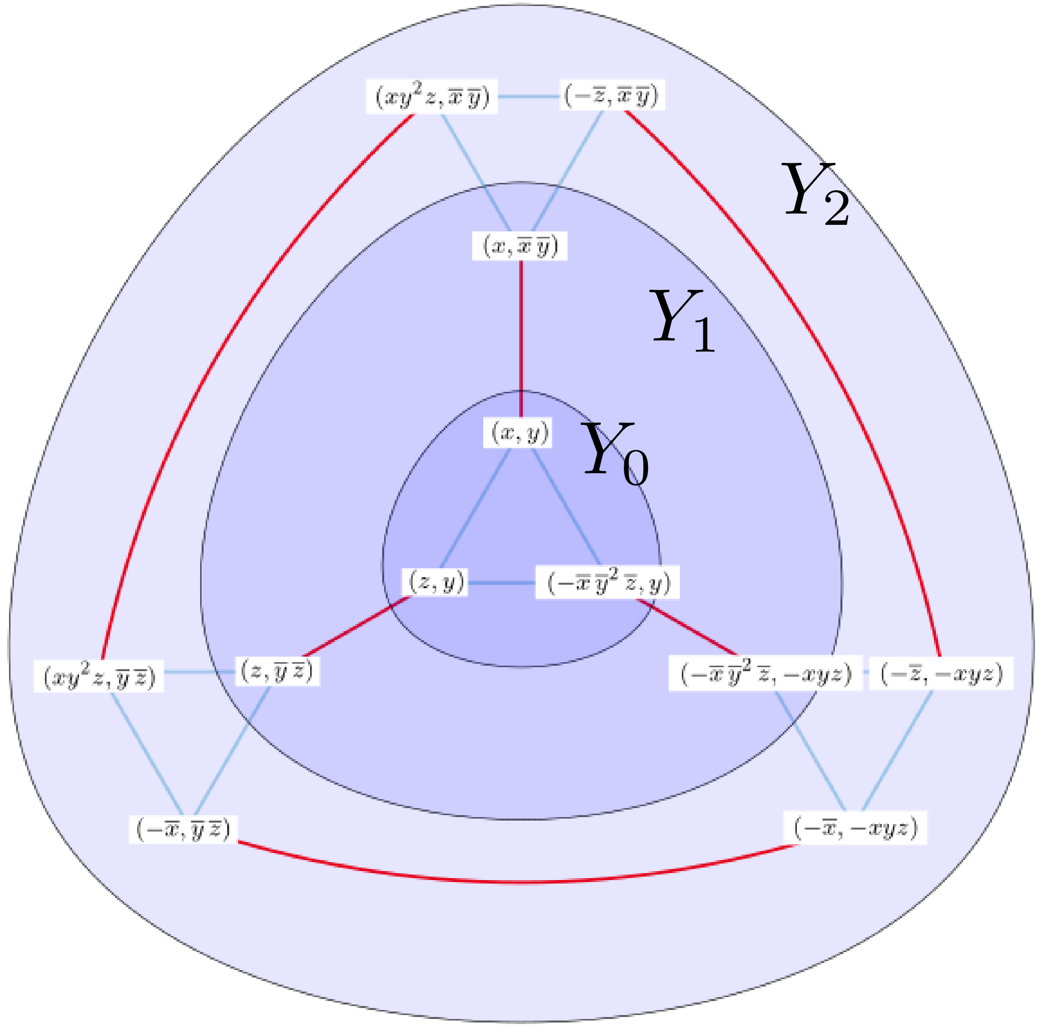
$$Y_0 := \sum_{\sigma \in G_y} \sigma \cdot (x,y) \qquad Y_1 := \sum_{\sigma \in G_y} \sigma \cdot (x, y_1)$$
$$Y_2 = \sum_{\sigma \in G} \sigma \cdot (x_4, y_1)$$

Si $\sigma \in G_y$, on a $\sigma \cdot Y_i = Y_i$

Construction de $\gamma_{\mathbf{x}}$ et $\gamma_{\mathbf{y}}$: traces

Proposition Soient $\sigma \in G$, c une 0-chaîne et $H(x, y) \in \mathbb{C}(t, x, y)$. Alors

$$\sigma \cdot H_c = H_{\sigma \cdot c}$$



$$Y_0 := \sum_{\sigma \in G_y} \sigma \cdot (x, y) \qquad Y_1 := \sum_{\sigma \in G_y} \sigma \cdot (x, y_1)$$
$$Y_2 = \sum_{\sigma \in G} \sigma \cdot (x_4, y_1)$$

Si $\sigma \in G_y$, on a $\sigma \cdot Y_i = Y_i$

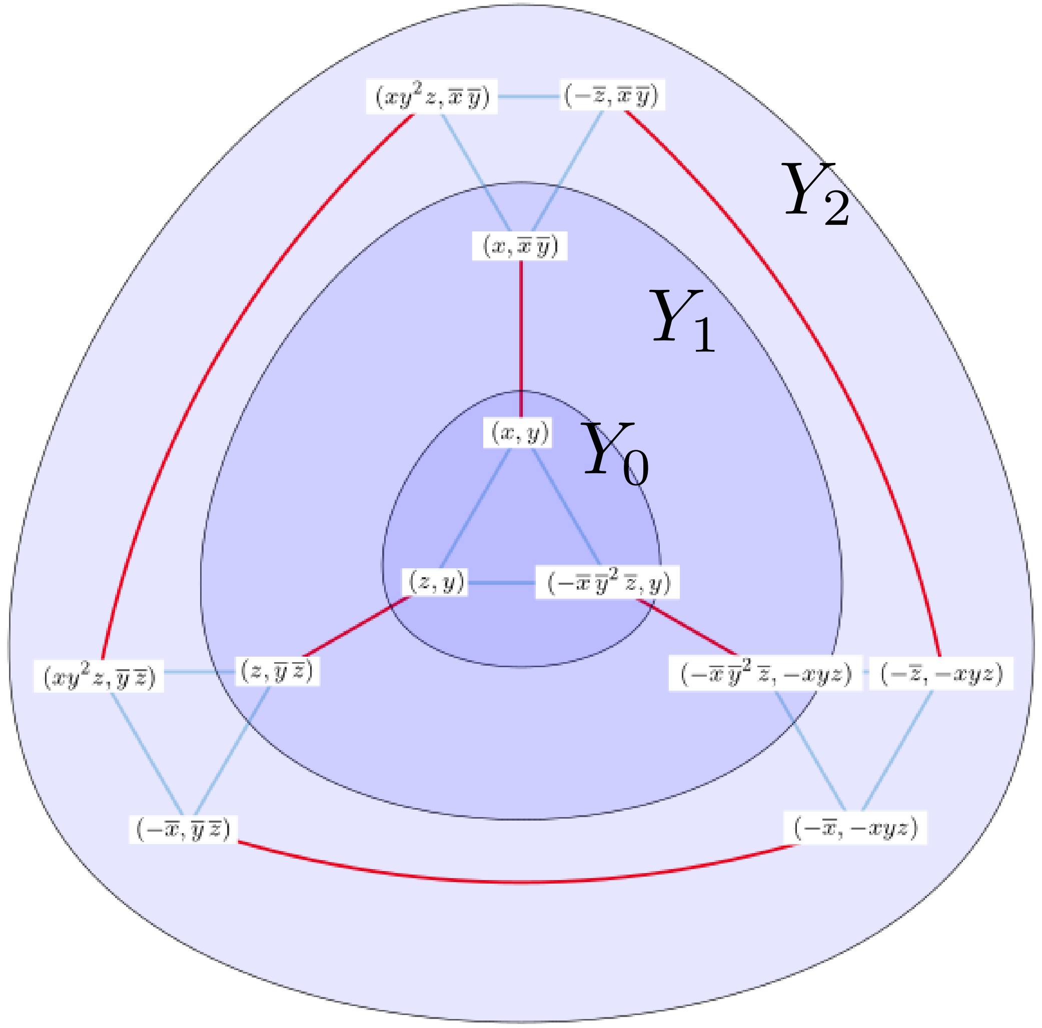
$\Rightarrow$ Si $H(x, y) \in \mathbb{C}(x, y, t)$, et $\sigma \in G_y$, on a

$$\sigma \cdot H_{Y_i} = H_{\sigma \cdot Y_i} = H_{Y_i} \in \mathbb{C}(t, \mathcal{O})$$

Construction de $\gamma_{\mathbf{x}}$ et $\gamma_{\mathbf{y}}$: traces

Proposition Soient $\sigma \in G$, c une 0-chaîne et $H(x,y) \in \mathbb{C}(t,x,y)$. Alors

$$\sigma \cdot H_c = H_{\sigma \cdot c}$$



$$Y_0 := \textstyle\sum_{\sigma \in G_y} \sigma \cdot (x,y) \qquad Y_1 := \textstyle\sum_{\sigma \in G_y} \sigma \cdot (x, y_1)$$
$$Y_2 = \textstyle\sum_{\sigma \in G} \sigma \cdot (x_4, y_1)$$

Si $\sigma \in G_y$, on a $\sigma \cdot Y_i = Y_i$

$\Rightarrow$ Si $H(x,y) \in \mathbb{C}(x,y,t)$, et $\sigma \in G_y$, on a

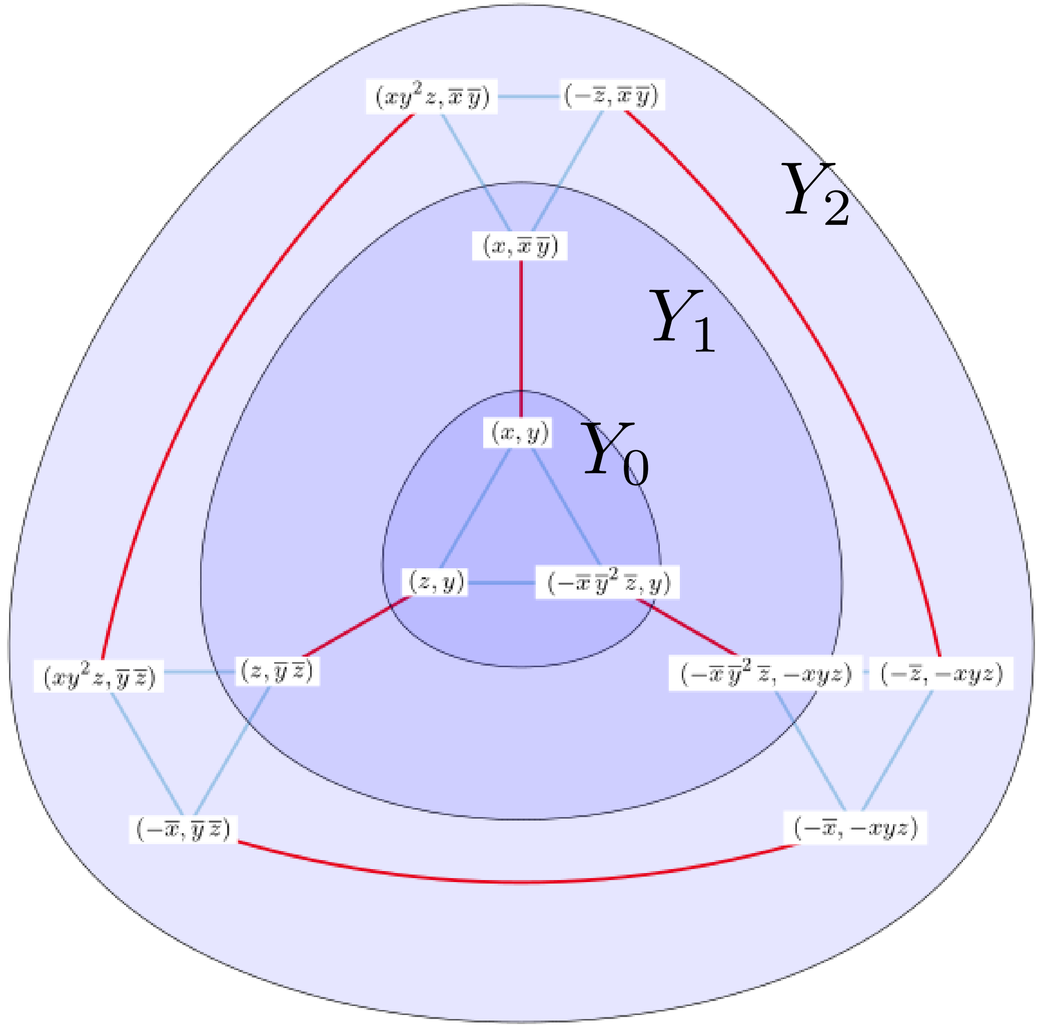
$$\sigma \cdot H_{Y_i} = H_{\sigma \cdot Y_i} = H_{Y_i} \in \mathbb{C}(t, \mathcal{O})$$

$\Rightarrow$ $H_{Y_0}, H_{Y_1}, H_{Y_2} \in \mathbb{C}(t,y)$ par Galois

Construction de $\gamma_{\mathbf{x}}$ et $\gamma_{\mathbf{y}}$: traces

Proposition Soient $\sigma \in G$, c une 0-chaîne et $H(x,y) \in \mathbb{C}(t,x,y)$. Alors

$$\sigma \cdot H_c = H_{\sigma \cdot c}$$



$$Y_0 := \textstyle\sum_{\sigma \in G_y} \sigma \cdot (x,y) \qquad Y_1 := \sum_{\sigma \in G_y} \sigma \cdot (x, y_1)$$
$$Y_2 = \textstyle\sum_{\sigma \in G} \sigma \cdot (x_4, y_1)$$

Si $\sigma \in G_y$, on a $\sigma \cdot Y_i = Y_i$

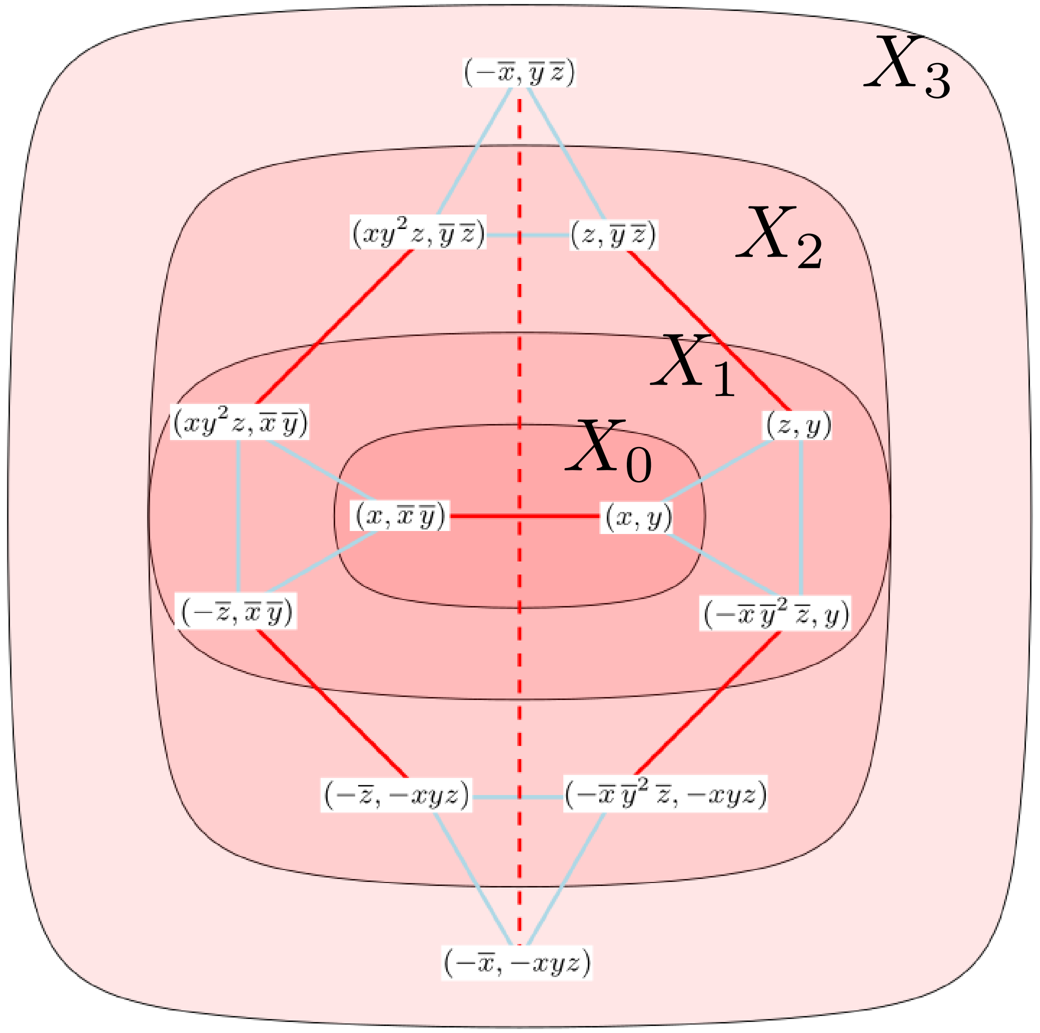
$\Rightarrow$ Si $H(x,y) \in \mathbb{C}(x,y,t)$, et $\sigma \in G_y$, on a

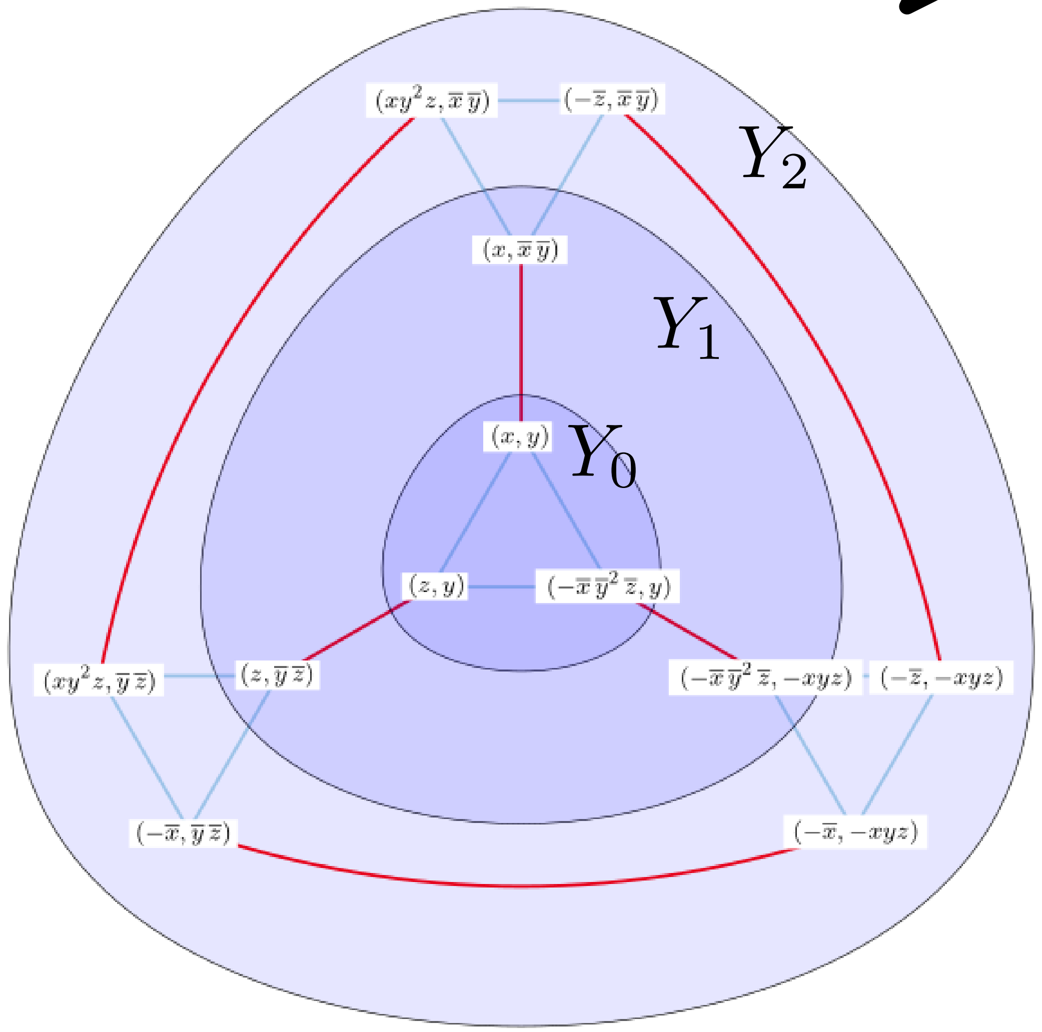
$$\sigma \cdot H_{Y_i} = H_{\sigma \cdot Y_i} = H_{Y_i} \in \mathbb{C}(t, \mathcal{O})$$

$\Rightarrow$ $H_{Y_0}, H_{Y_1}, H_{Y_2} \in \mathbb{C}(t,y)$ par Galois

γ_y est combinaison linéaire des Y_i

Exemple





$$(x, y) = \left(\frac{X_0}{2} - \frac{X_1}{8} + \frac{X_2}{8}\right) + \left(\frac{Y_0}{4} - \frac{Y_1}{4}\right) + \alpha$$

$$xy \equiv -\frac{3tx^2 - t - 4x}{4t(x^2+1)} + -\frac{y+4}{4y} + 0$$

Une jolie formule

Théorème [B., Hardouin 24] Si l'orbite est *distance-transitive*, alors le découplage de (x, y) est donné par

$$\gamma_x = \sum_{i\geq 1} \frac{\#\mathcal{X}_i}{\#\mathcal{O}} \sum_{1\leq 2j+1\leq i} \left(\frac{X_{2j}}{\#\mathcal{X}_{2j}} - \frac{X_{2j+1}}{\#\mathcal{X}_{2j+1}} \right)$$

$$\gamma_y = \sum_{i\geq 1} \frac{\#\mathcal{Y}_i}{\#\mathcal{O}} \sum_{1\leq 2j+1\leq i} \left(\frac{Y_{2j}}{\#\mathcal{Y}_{2j}} - \frac{Y_{2j+1}}{\#\mathcal{Y}_{2j+1}} \right)$$

Une jolie formule

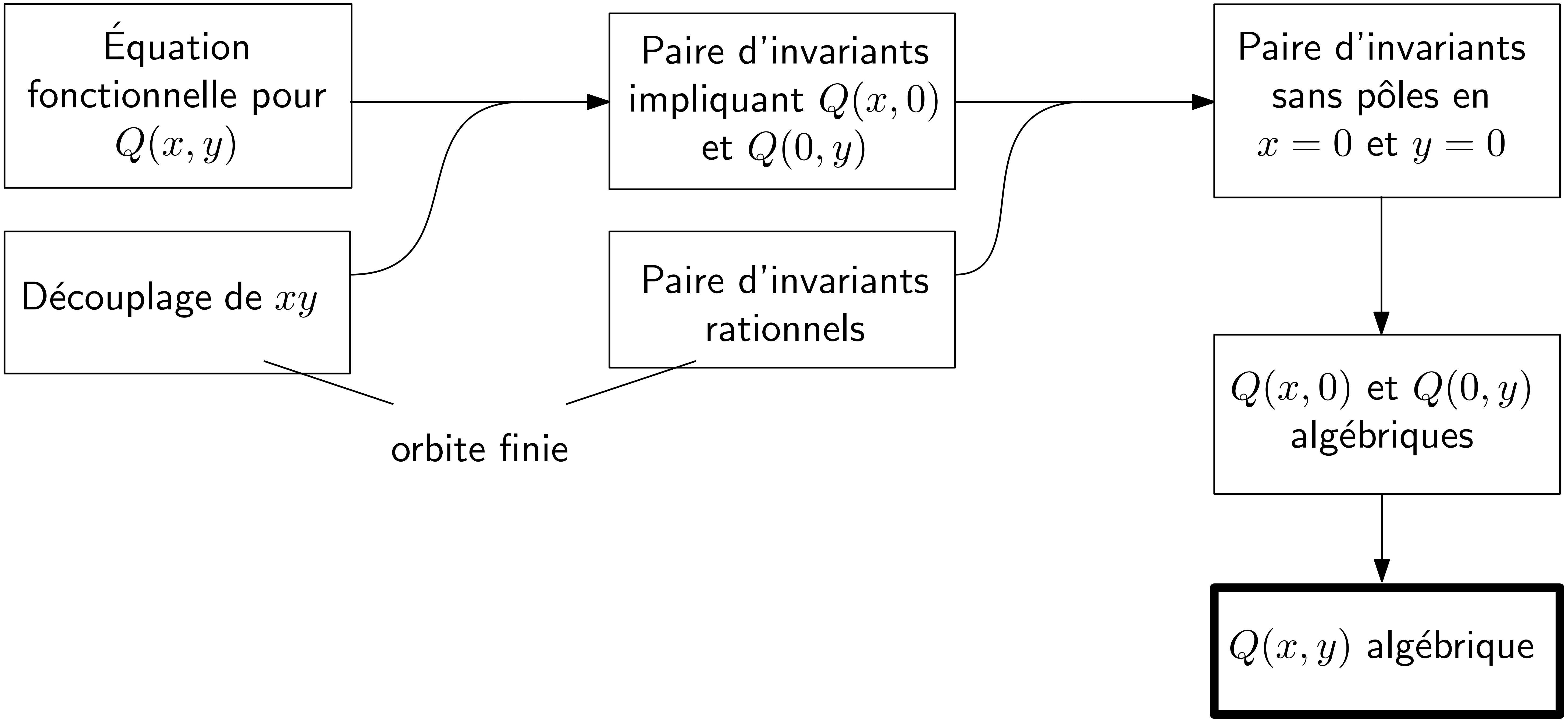
Théorème [B., Hardouin 24] Si l'orbite est *distance-transitive*, alors le découplage de (x, y) est donné par

$$\gamma_x = \sum_{i\geq 1} \frac{\#\mathcal{X}_i}{\#\mathcal{O}} \sum_{1\leq 2j+1\leq i} \left(\frac{X_{2j}}{\#\mathcal{X}_{2j}} - \frac{X_{2j+1}}{\#\mathcal{X}_{2j+1}} \right)$$

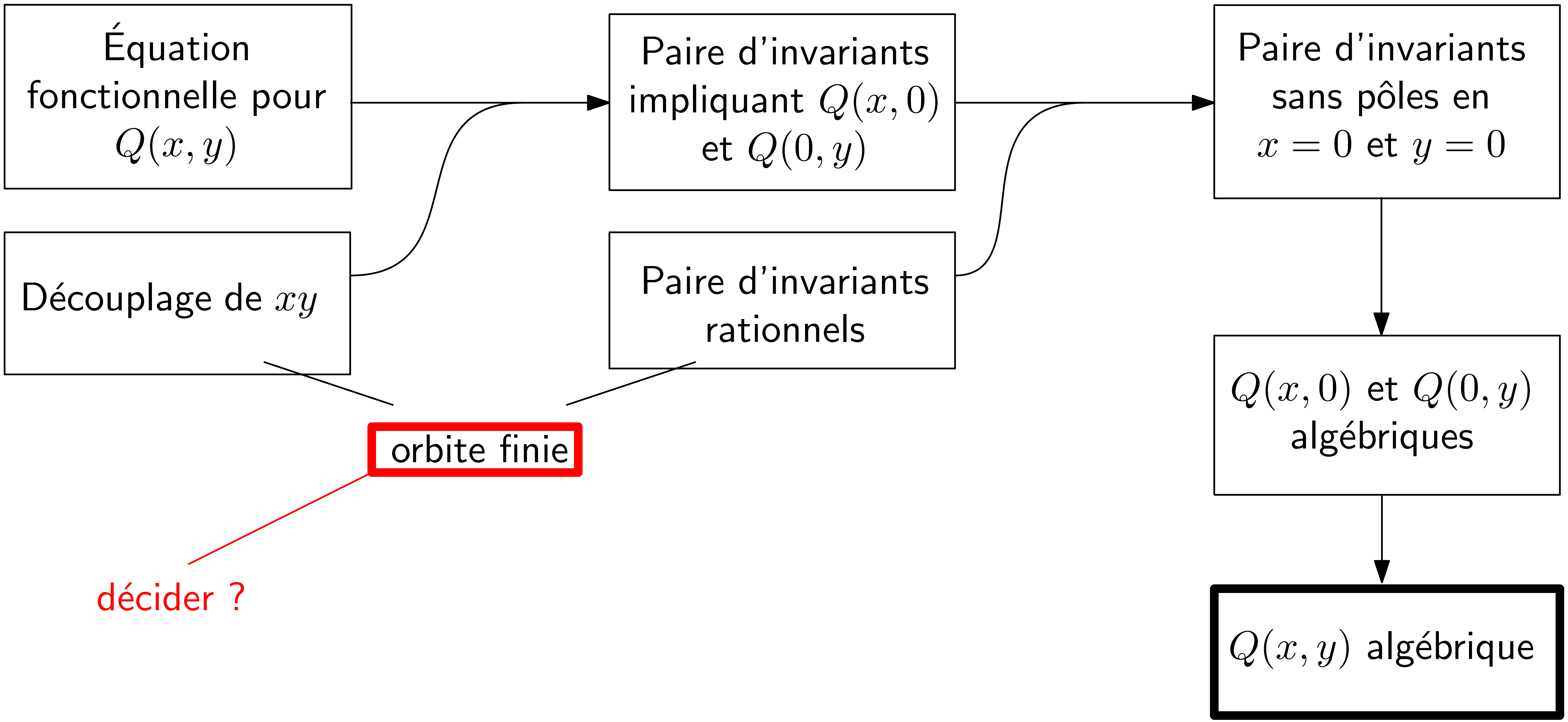
$$\gamma_y = \sum_{i\geq 1} \frac{\#\mathcal{Y}_i}{\#\mathcal{O}} \sum_{1\leq 2j+1\leq i} \left(\frac{Y_{2j}}{\#\mathcal{Y}_{2j}} - \frac{Y_{2j+1}}{\#\mathcal{Y}_{2j+1}} \right)$$

$\Rightarrow$ évaluations sous forme de sommes de Newton explicites

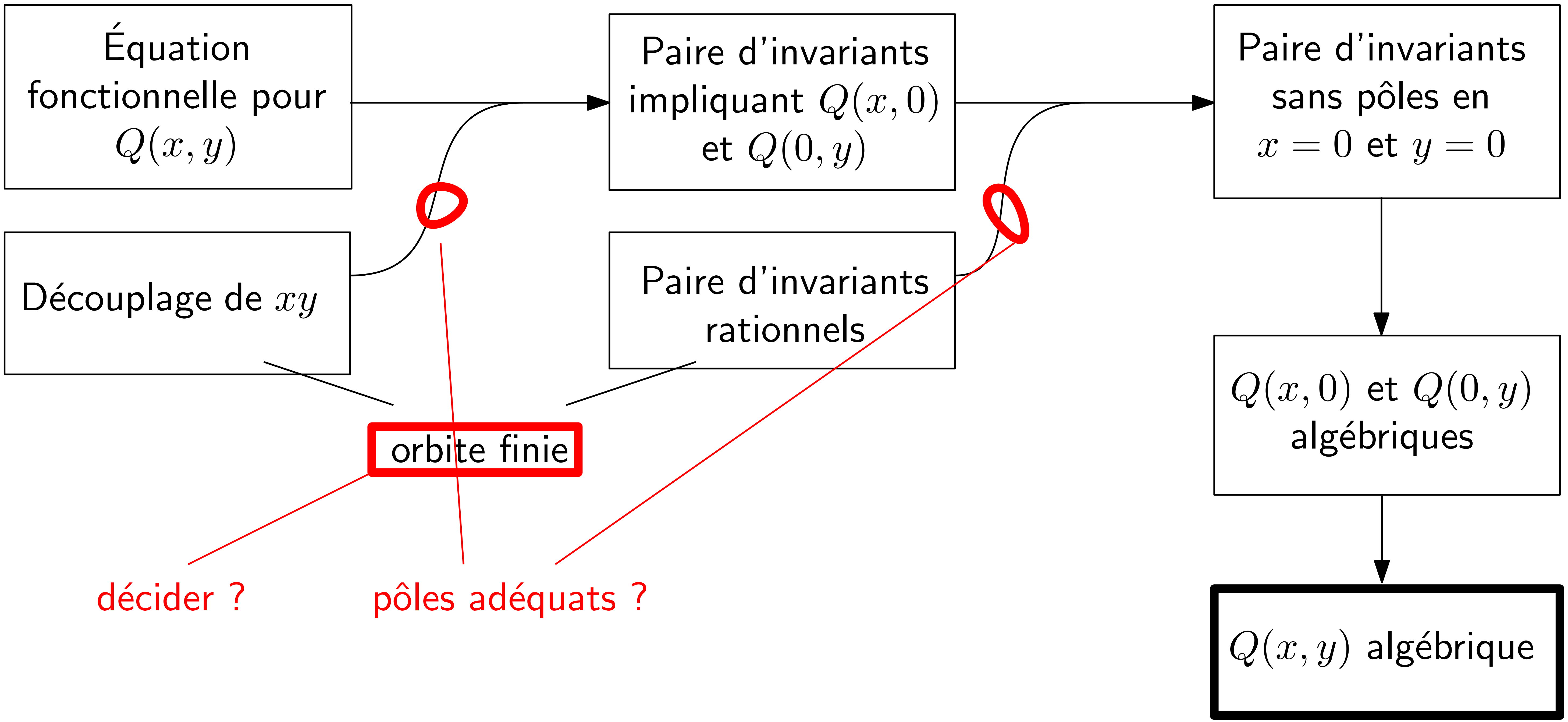
Retour sur la stratégie d'algébricité



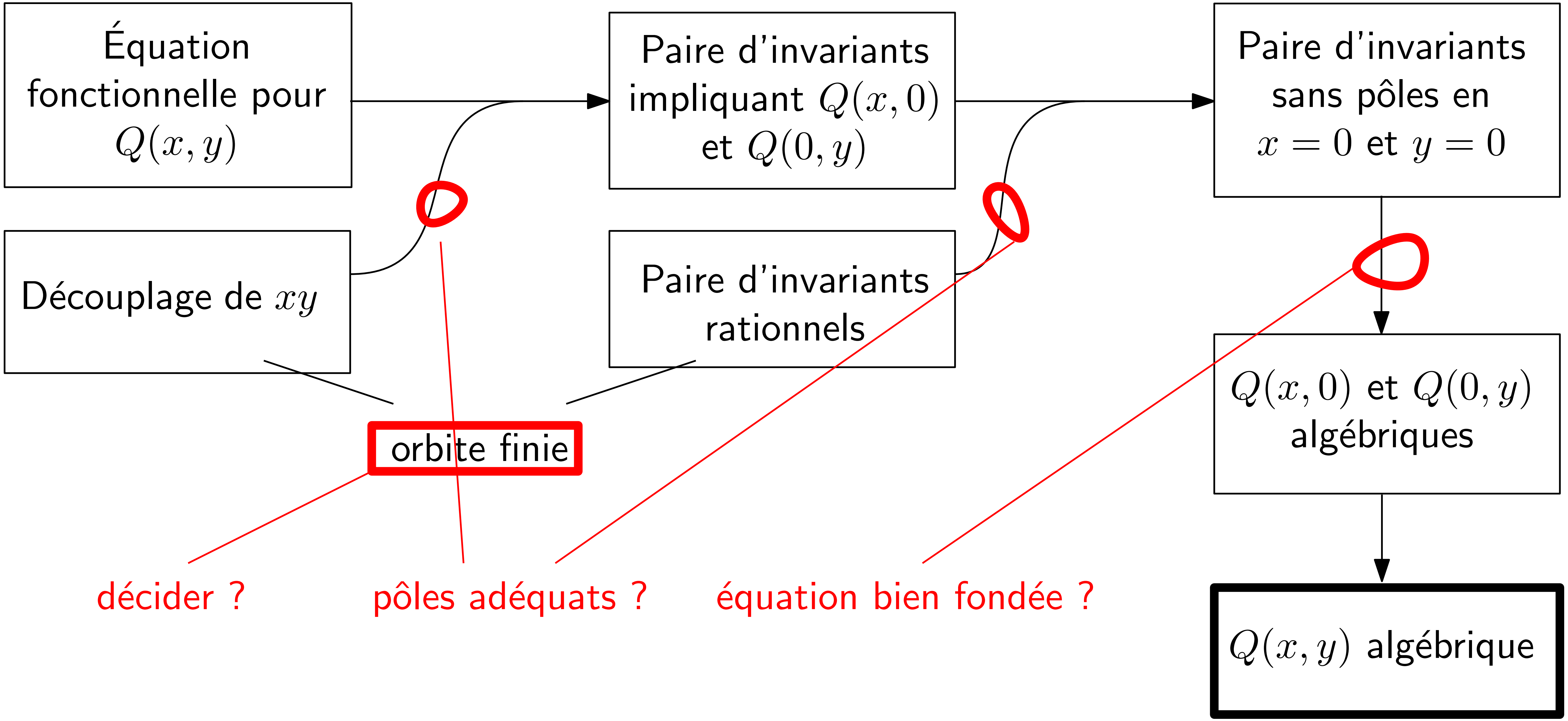
Retour sur la stratégie d'algébricité



Retour sur la stratégie d'algébricité



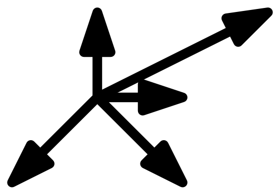
Retour sur la stratégie d'algébricité



Applications

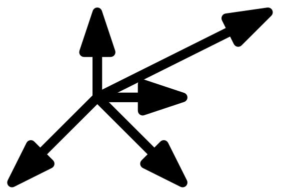
Applications

• Premières preuves d'algébricité de modèles à grands pas (conj. [Bousquet-Mélou,Bostan,Melczer,18]) + polynôme minimal de la série des excursions

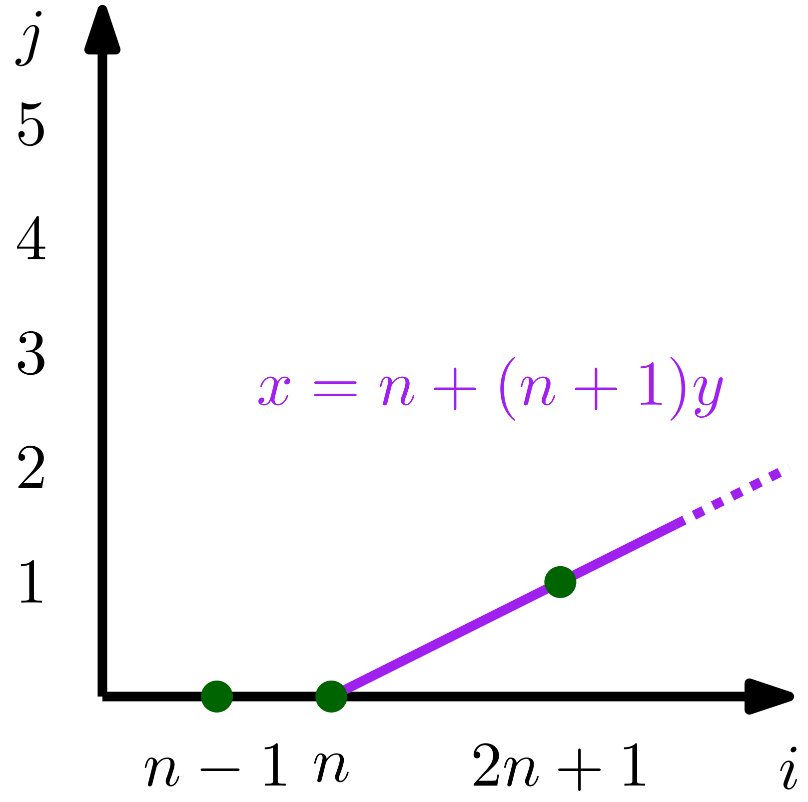


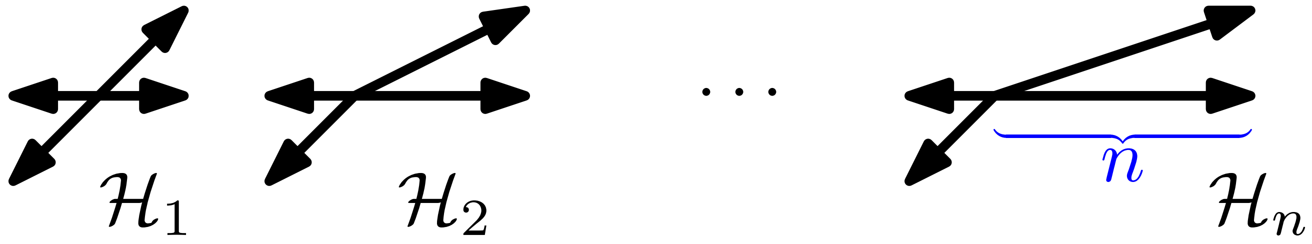
Applications

- Premières preuves d'algébricité de modèles à grands pas (conj. [Bousquet-Mélou,Bostan,Melczer,18]) + polynôme minimal de la série des excursions



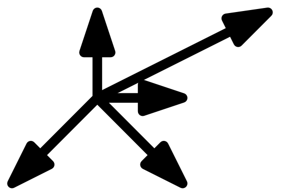
- Conjecture d'algébricité d'une famille infinie de modèles qui étendent le modèle de Gessel



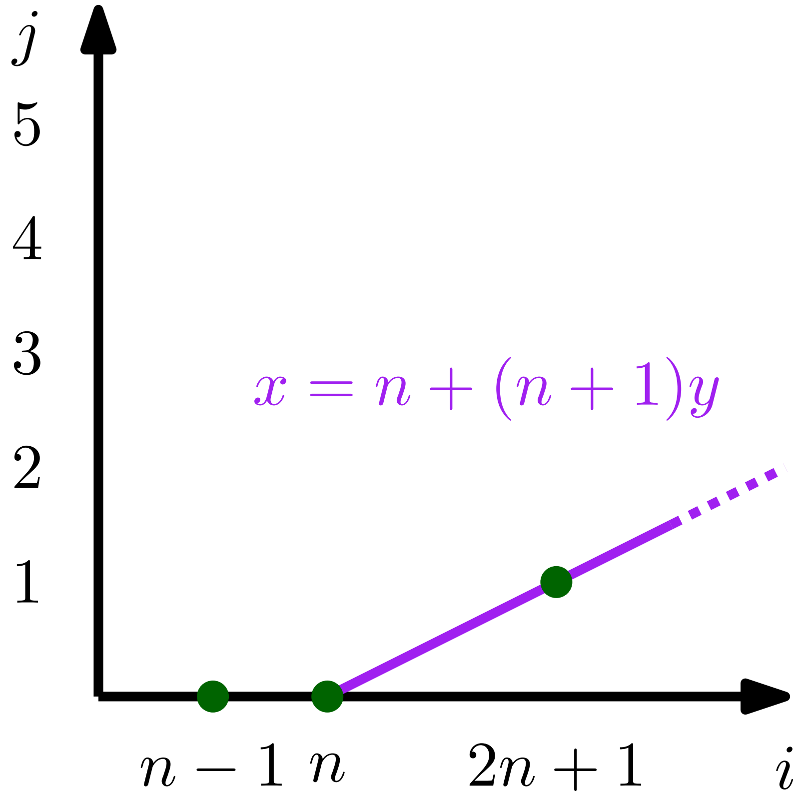


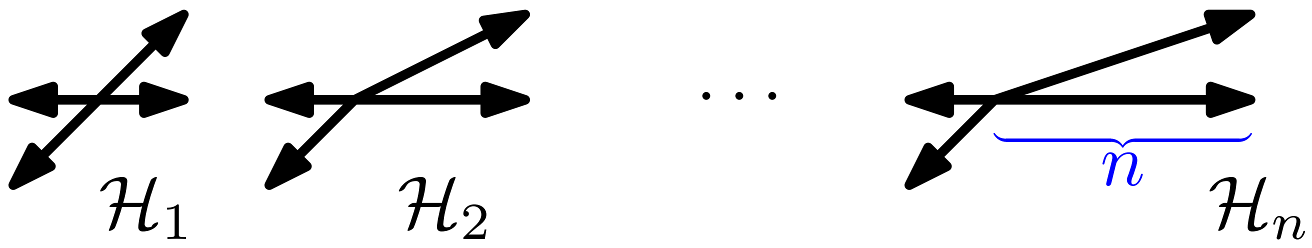
Applications

- Premières preuves d'algébricité de modèles à grands pas (conj. [Bousquet-Mélou,Bostan,Melczer,18]) $+$ polynôme minimal de la série des excursions



- Conjecture d'algébricité d'une famille infinie de modèles qui étendent le modèle de Gessel

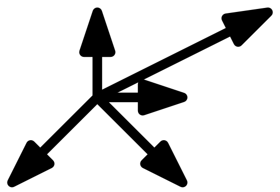




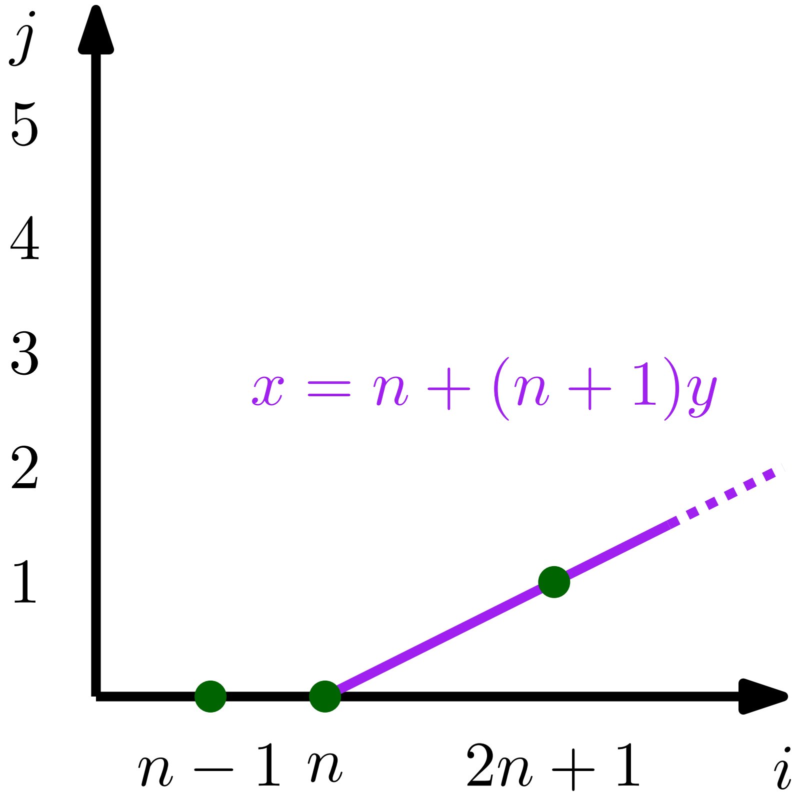
- orbite finie

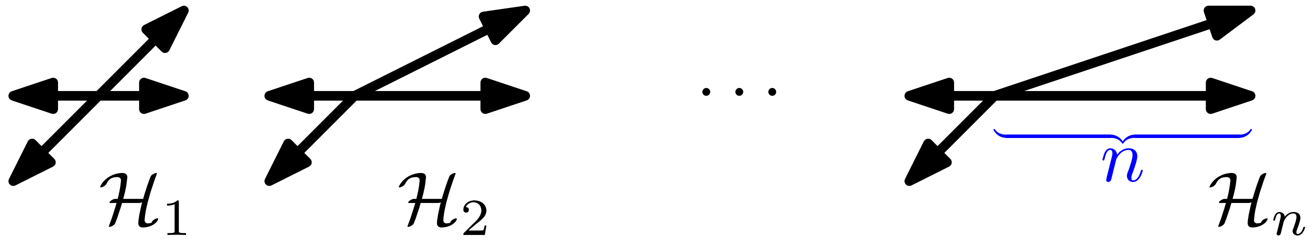
Applications

- Premières preuves d'algébricité de modèles à grands pas (conj. [Bousquet-Mélou,Bostan,Melczer,18]) + polynôme minimal de la série des excursions



- Conjecture d'algébricité d'une famille infinie de modèles qui étendent le modèle de Gessel



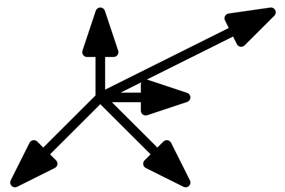


- orbite finie

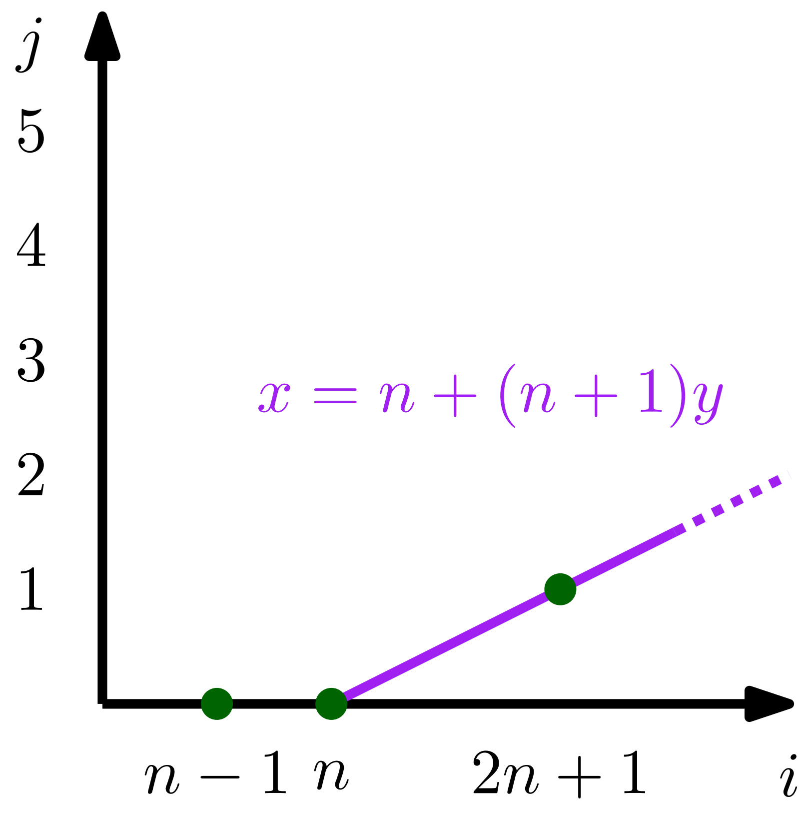
- invariants rationnels explicites

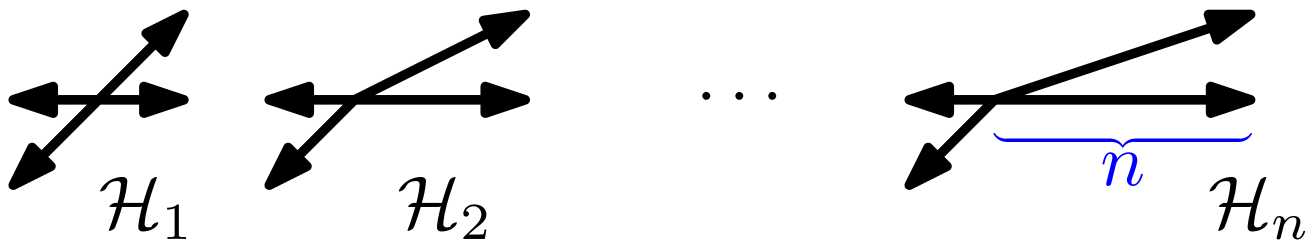
Applications

• Premières preuves d'algébricité de modèles à grands pas (conj. [Bousquet-Mélou,Bostan,Melczer,18]) + polynôme minimal de la série des excursions



• Conjecture d'algébricité d'une famille infinie de modèles qui étendent le modèle de Gessel





• orbite finie

• invariants rationnels explicites

• découplage explicite de $x^{i+1}y^{j+1}$ tous les points de départ (i,j) conjecturés

Projets futurs

Projets futurs

- Montrer le critère orbite finie + xy découple $\Rightarrow$ algébricité

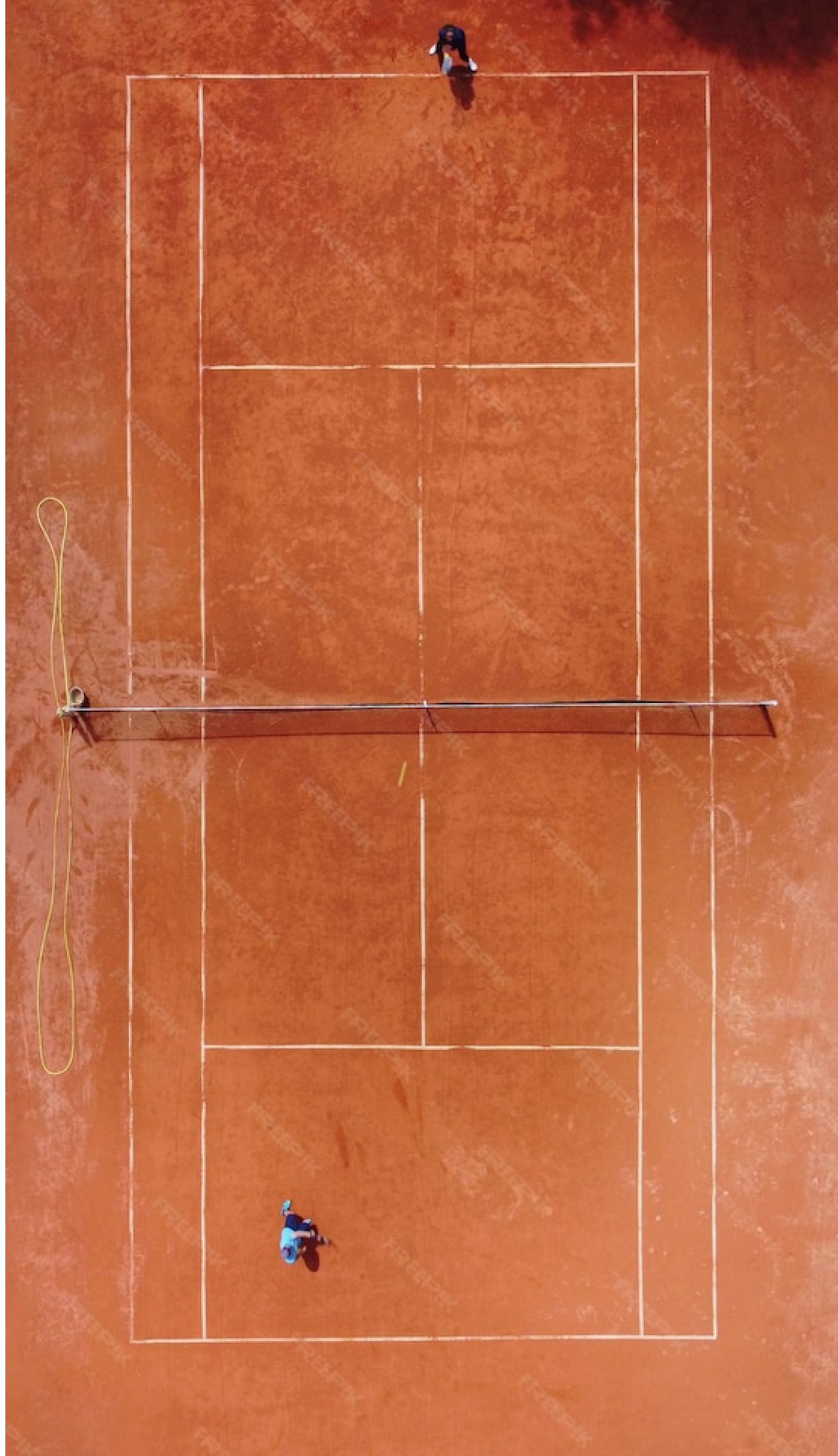
Projets futurs

- Montrer le critère orbite finie $+\ xy$ découple $\Rightarrow$ algébricité
- Continuer d'exploiter la structure de l'orbite pour d'autres fins

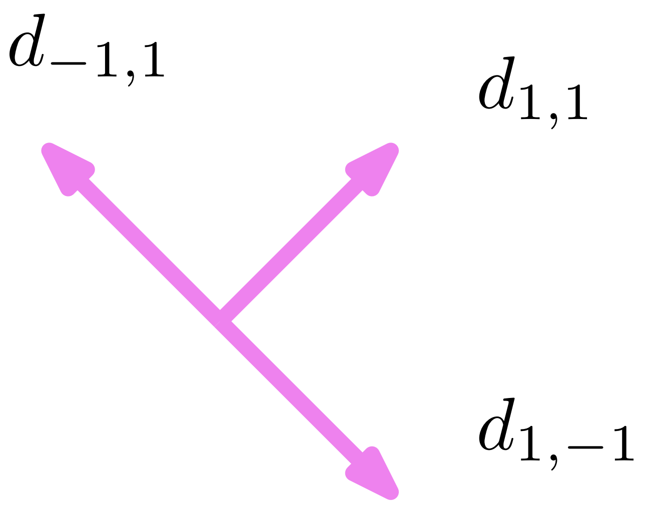
Projets futurs

- Montrer le critère orbite finie $+\ xy$ découple $\Rightarrow$ algébricité
- Continuer d'exploiter la structure de l'orbite pour d'autres fins
- Découvrir d'autres modèles d'orbite finie $+$ détecter les points de départ algébriques

2. Chemins à petits pas de genre zéro à bords interactifs

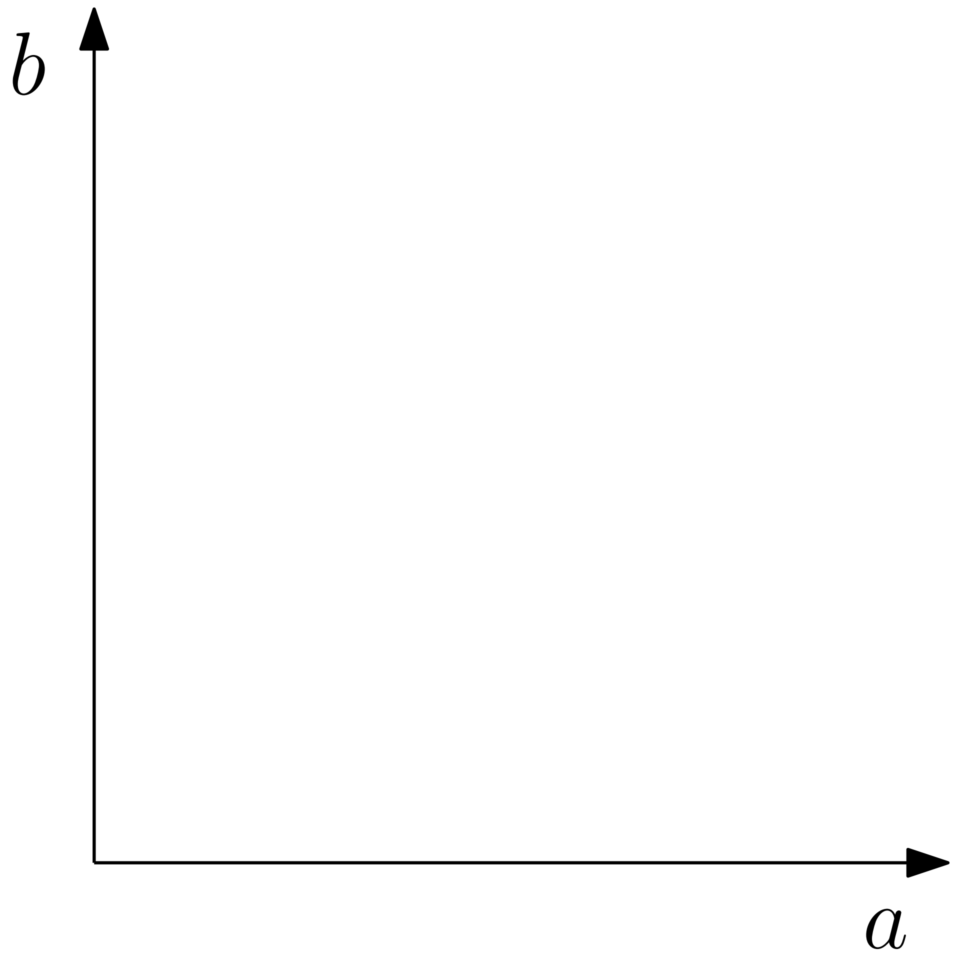


Chemins à bords interactifs

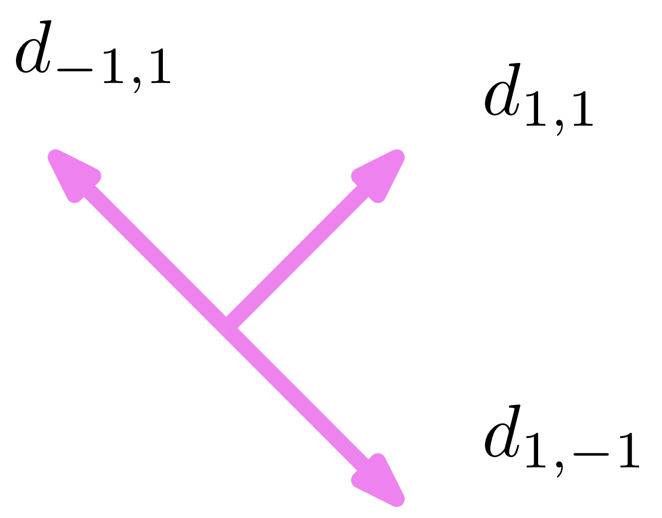


$\mathcal{S} = \{(1,1),(1,-1),(-1,1)\}$

($\mathcal{S}$ est un modèle)

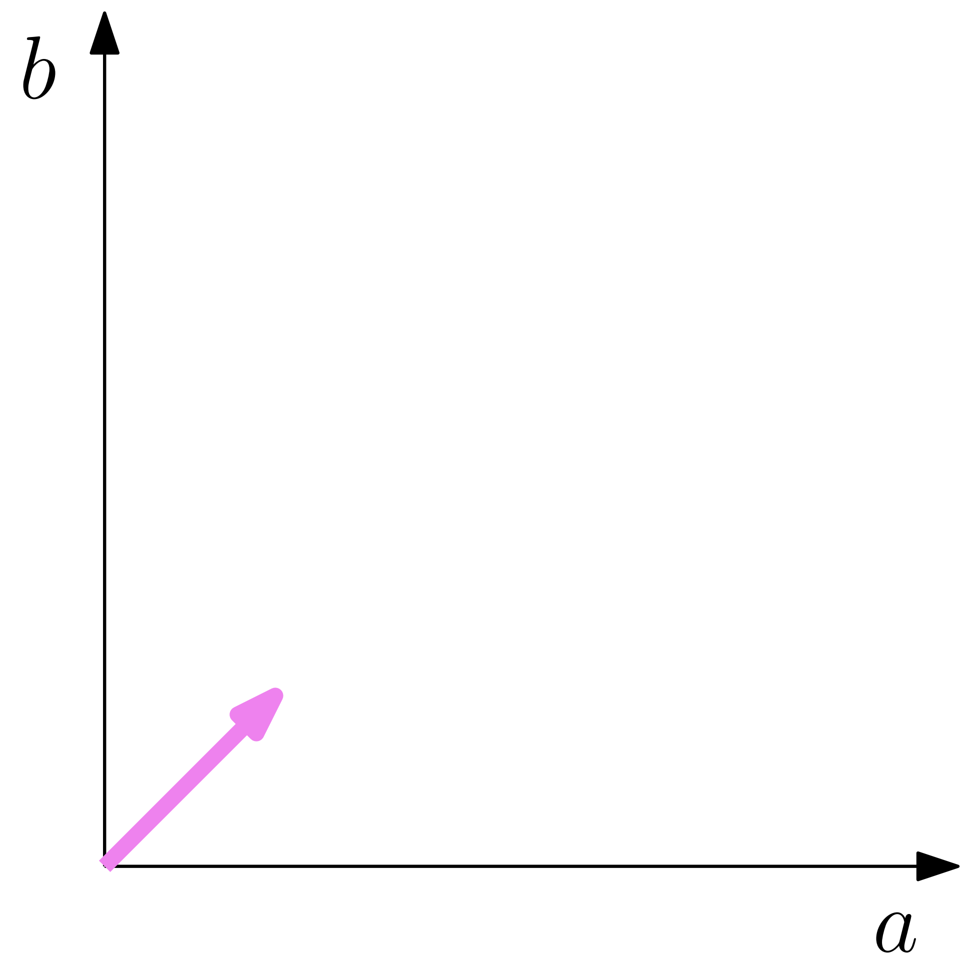


Chemins à bords interactifs

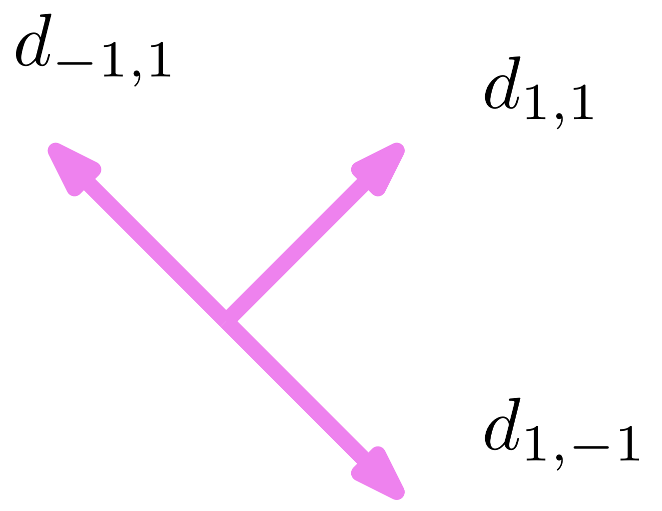


$\mathcal{S} = \{(1,1),(1,-1),(-1,1)\}$

($\mathcal{S}$ est un modèle)

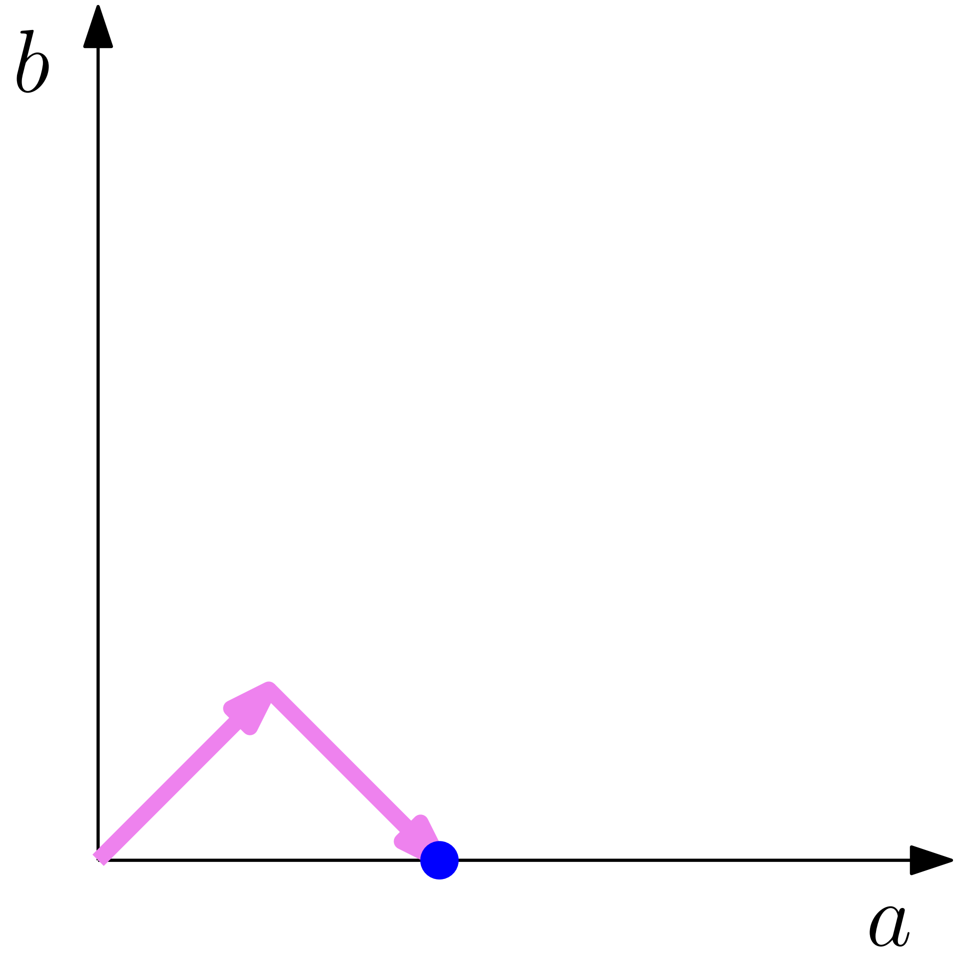


Chemins à bords interactifs

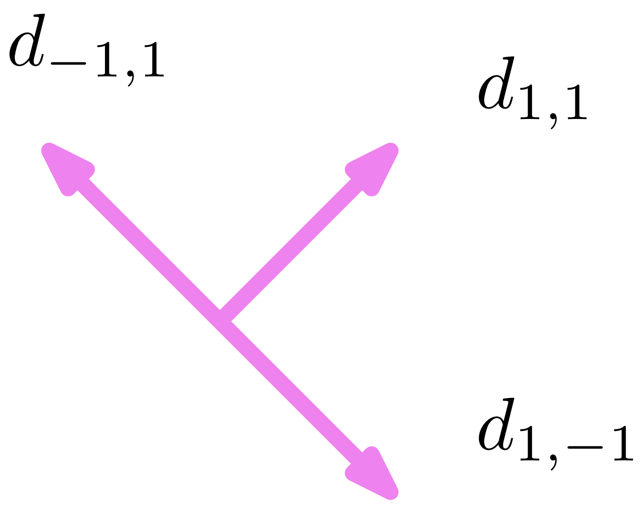


$\mathcal{S} = \{(1,1), (1,-1), (-1,1)\}$

($\mathcal{S}$ est un modèle)

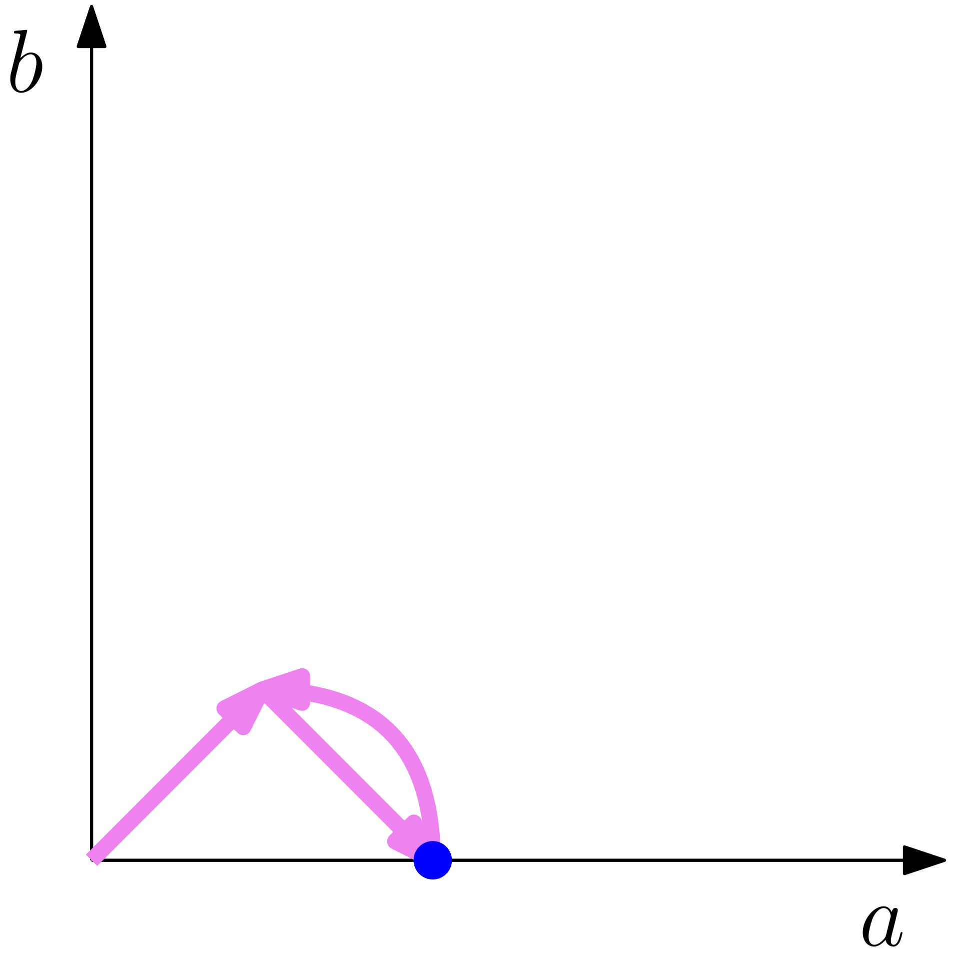


Chemins à bords interactifs

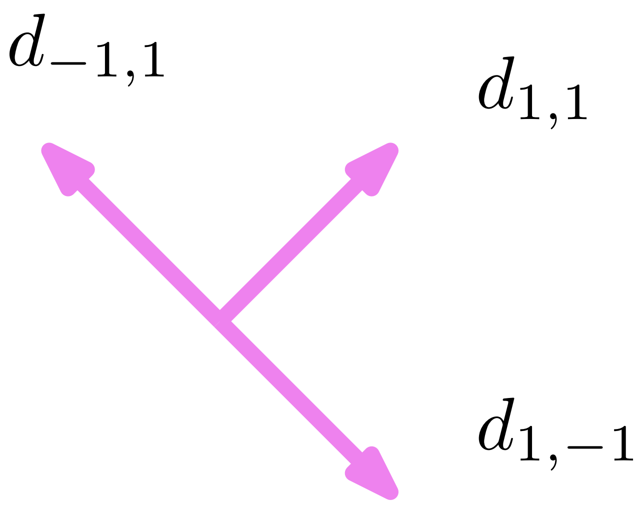


$\mathcal{S} = \{(1,1),(1,-1),(-1,1)\}$

($\mathcal{S}$ est un modèle)

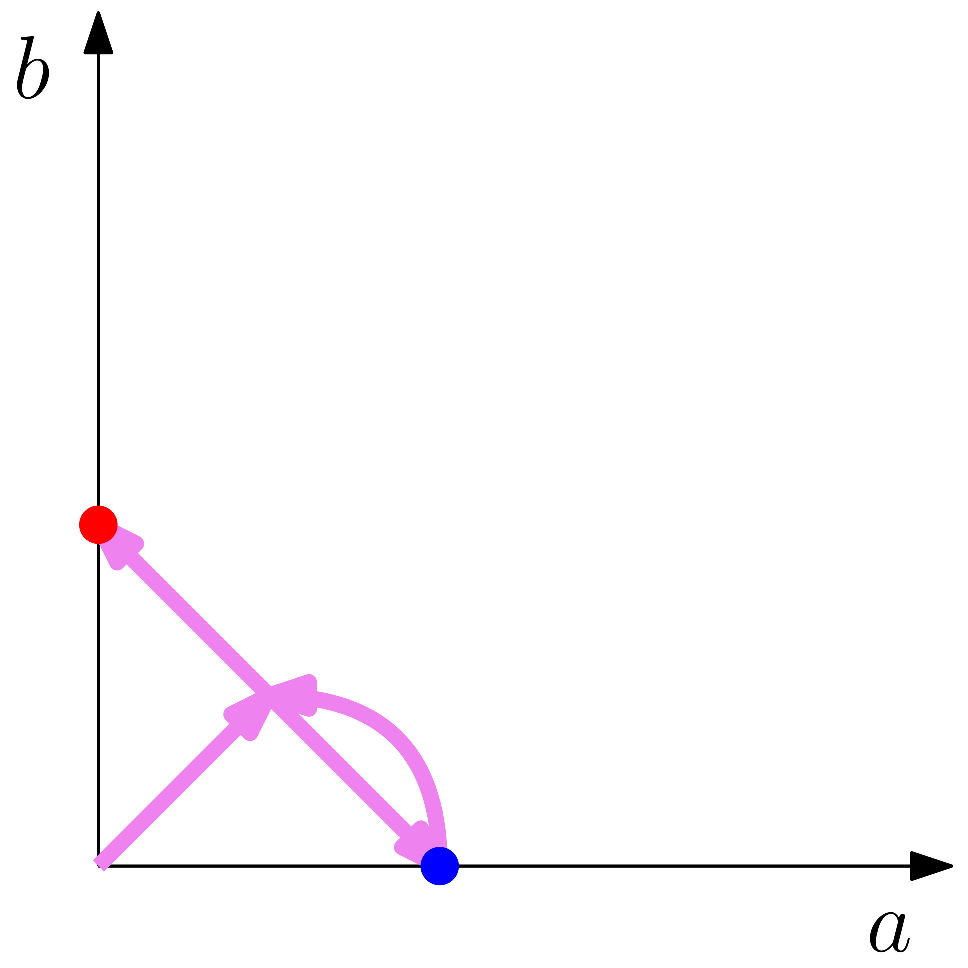


Chemins à bords interactifs

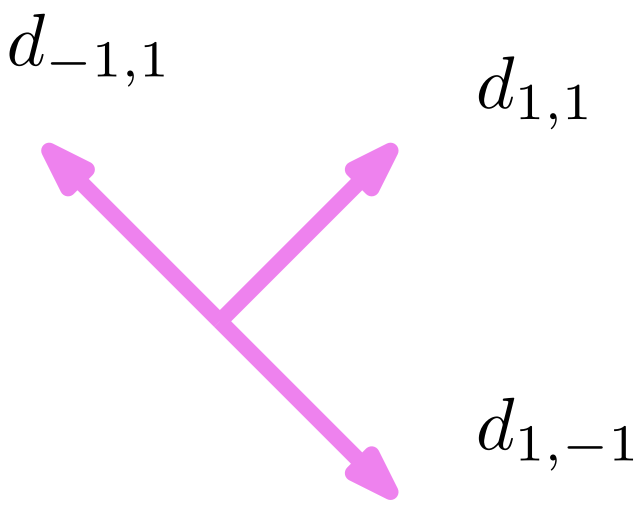


$\mathcal{S} = \{(1,1),(1,-1),(-1,1)\}$

($\mathcal{S}$ est un modèle)

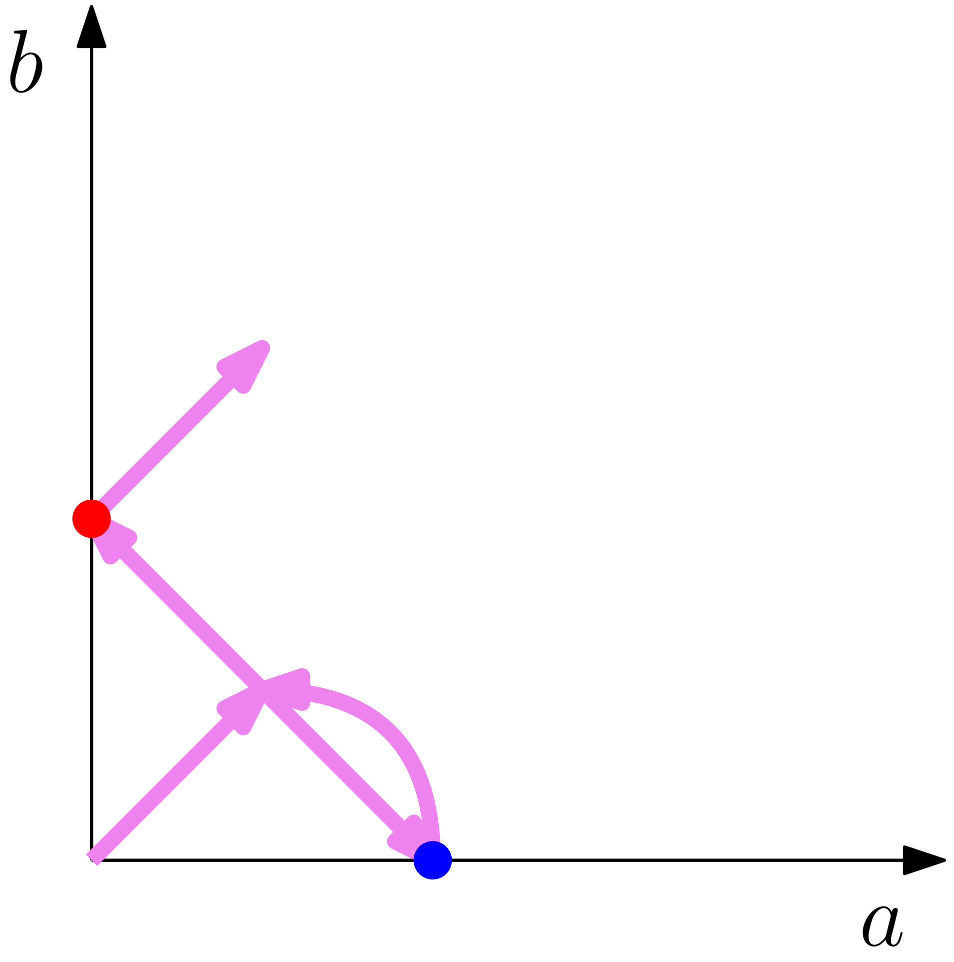


Chemins à bords interactifs

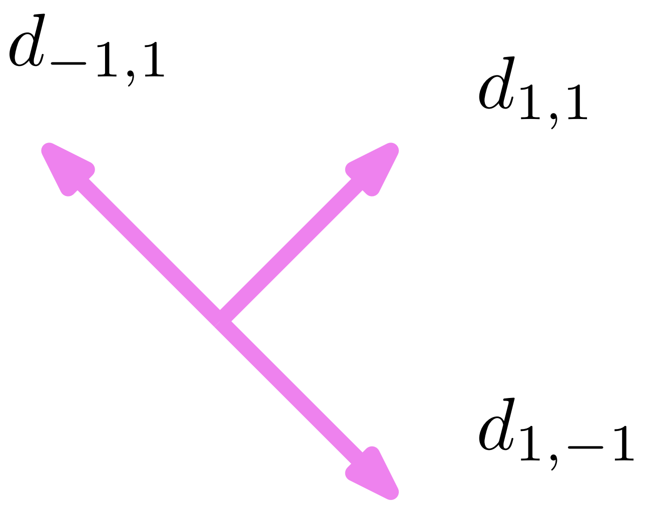


$\mathcal{S} = \{(1,1),(1,-1),(-1,1)\}$

($\mathcal{S}$ est un modèle)

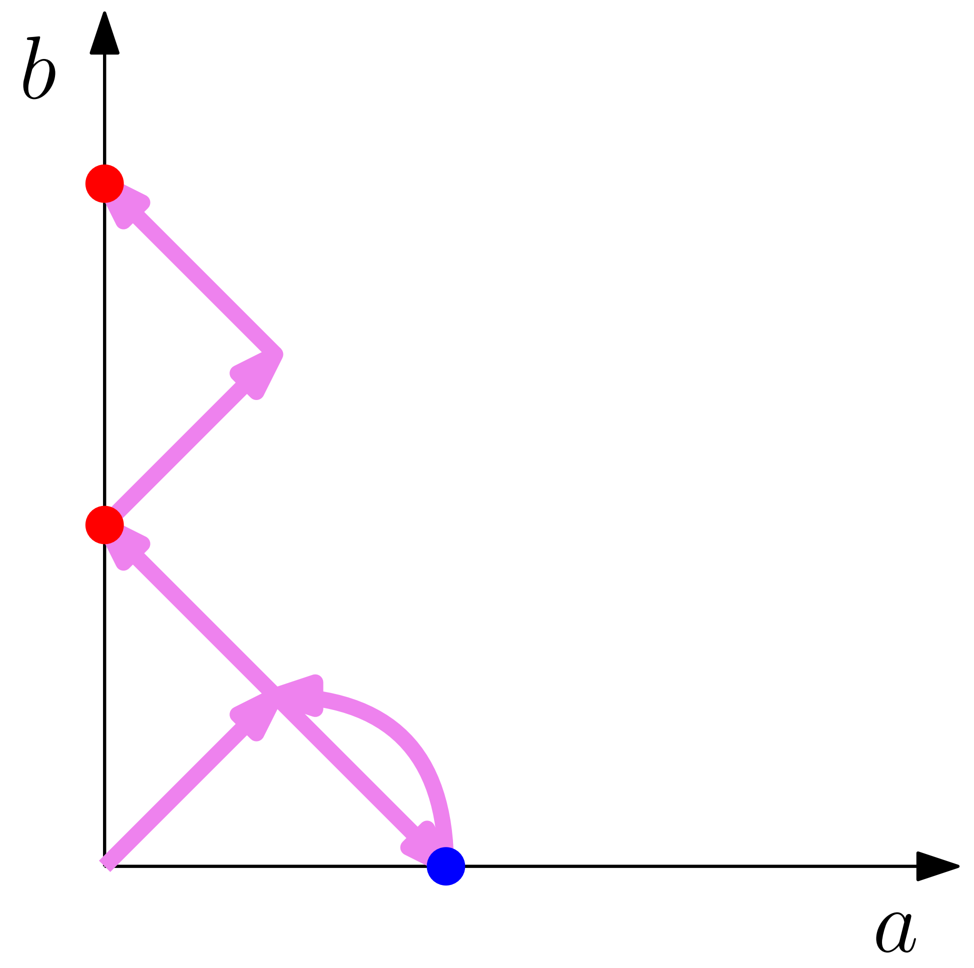


Chemins à bords interactifs

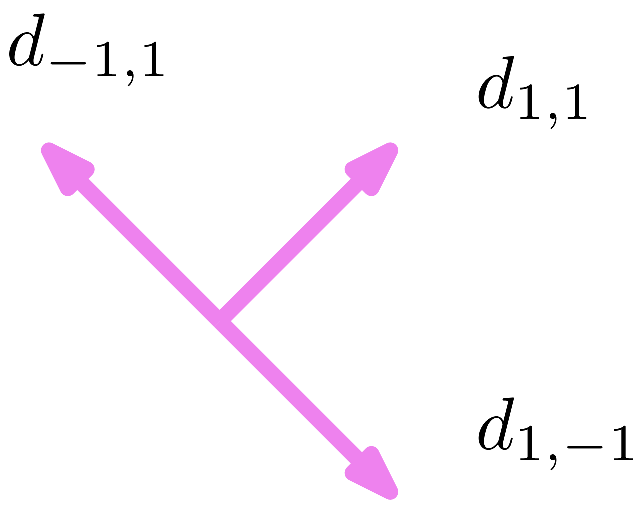


$\mathcal{S} = \{(1,1),(1,-1),(-1,1)\}$

($\mathcal{S}$ est un modèle)

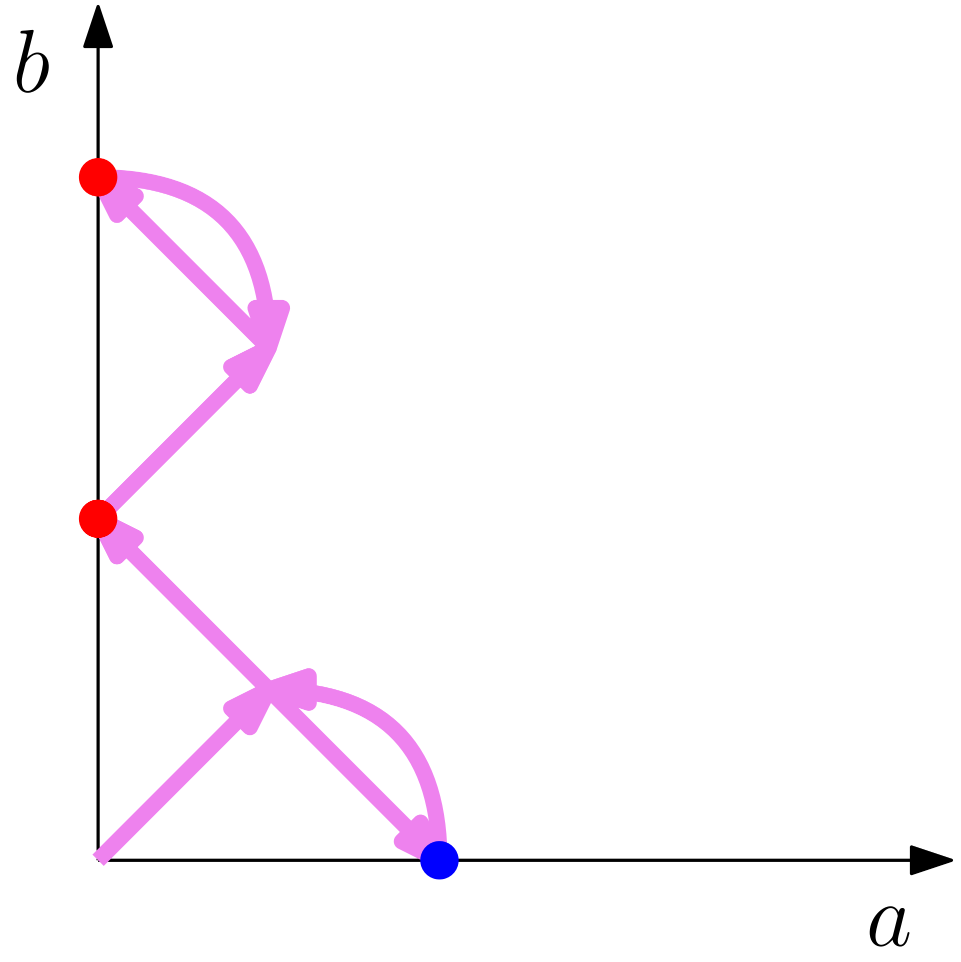


Chemins à bords interactifs

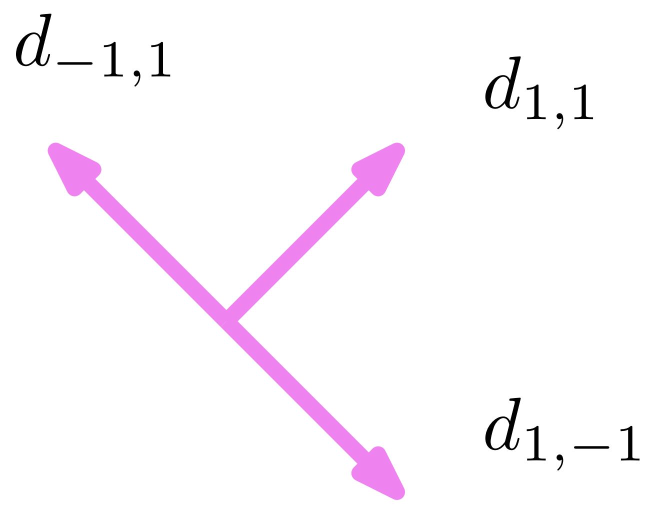


$\mathcal{S} = \{(1,1),(1,-1),(-1,1)\}$

($\mathcal{S}$ est un modèle)

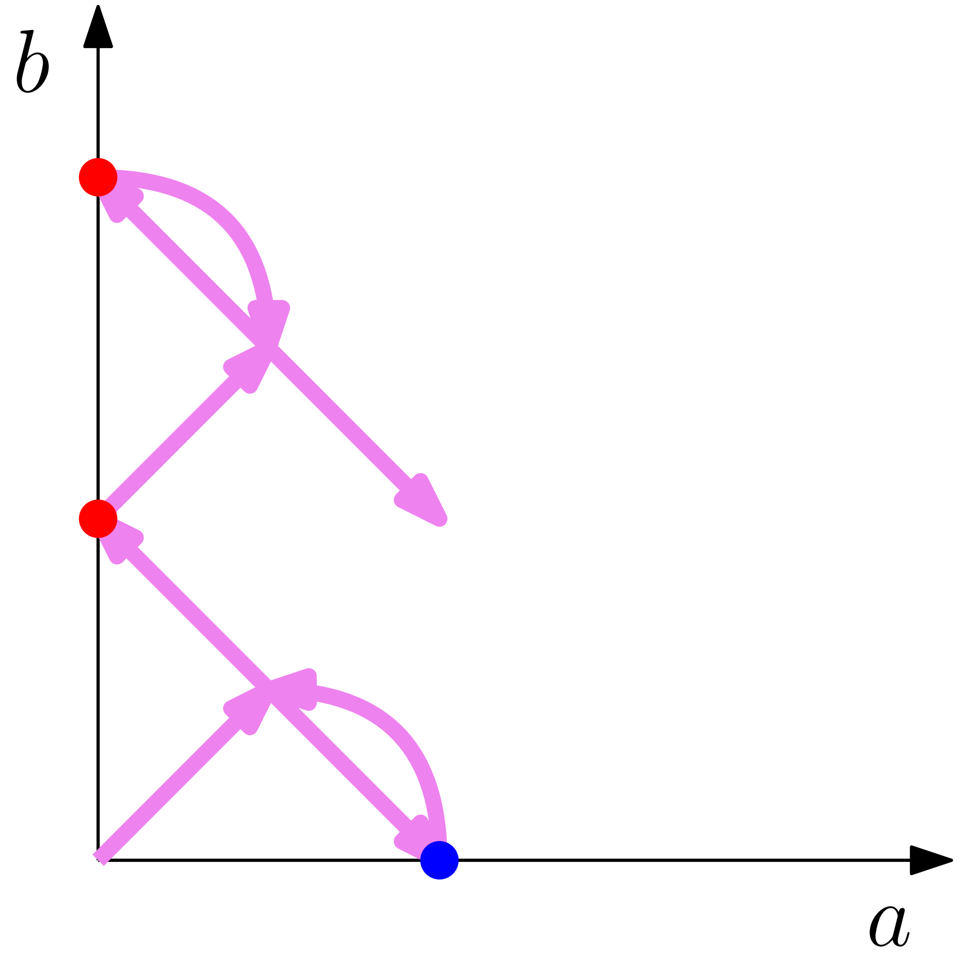


Chemins à bords interactifs

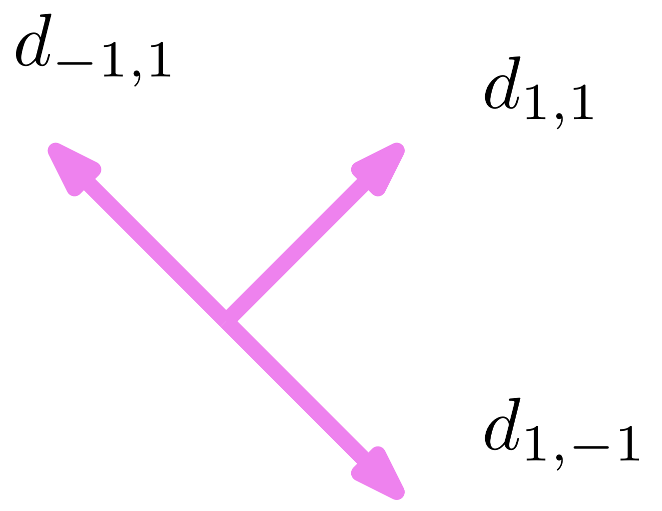


$\mathcal{S} = \{(1,1),(1,-1),(-1,1)\}$

($\mathcal{S}$ est un modèle)

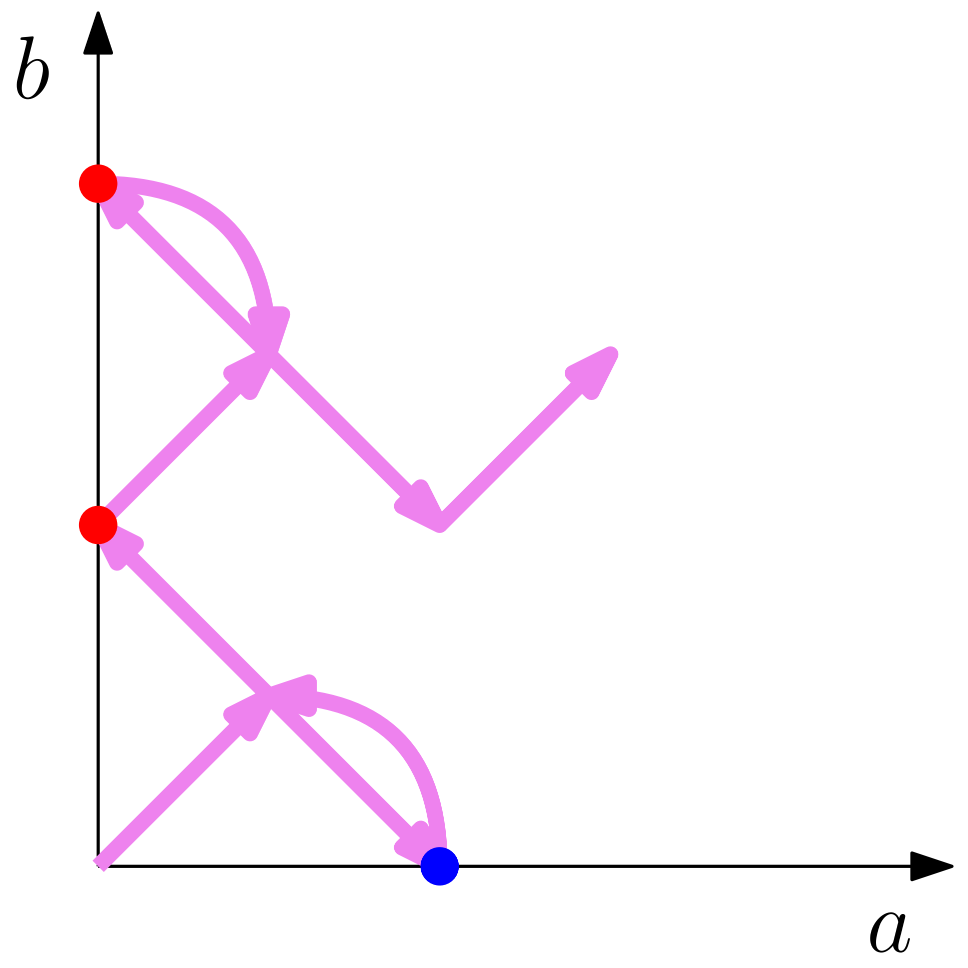


Chemins à bords interactifs

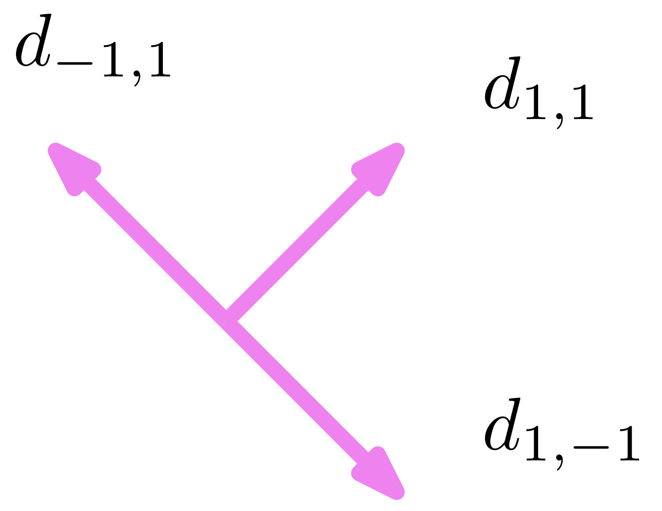


$\mathcal{S} = \{(1,1),(1,-1),(-1,1)\}$

($\mathcal{S}$ est un modèle)

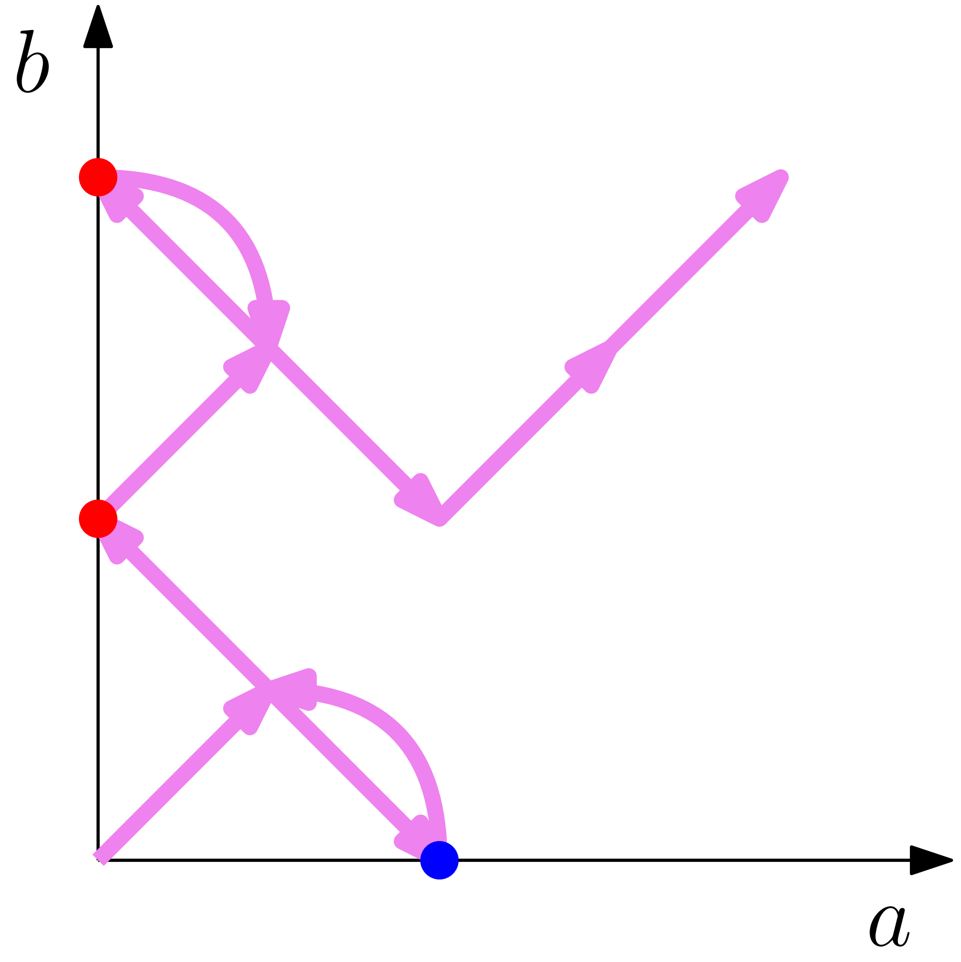


Chemins à bords interactifs

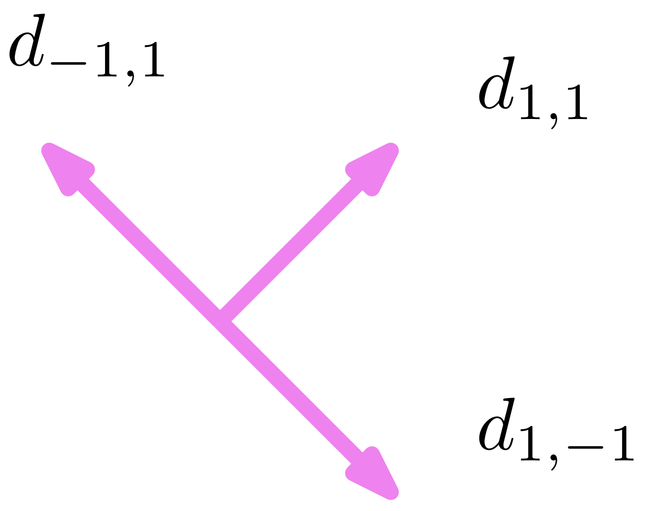


$\mathcal{S} = \{(1,1), (1,-1), (-1,1)\}$

($\mathcal{S}$ est un modèle)

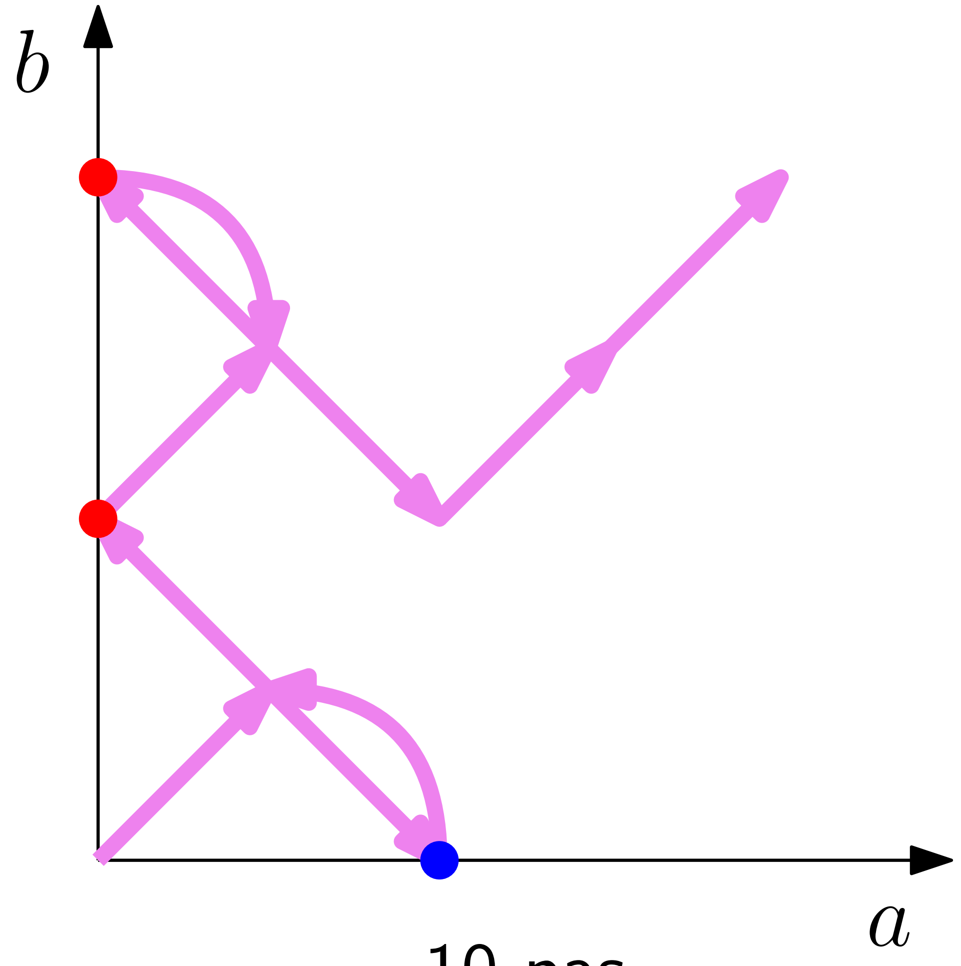


Chemins à bords interactifs



$\mathcal{S} = \{(1,1),(1,-1),(-1,1)\}$

($\mathcal{S}$ est un modèle)



10 pas

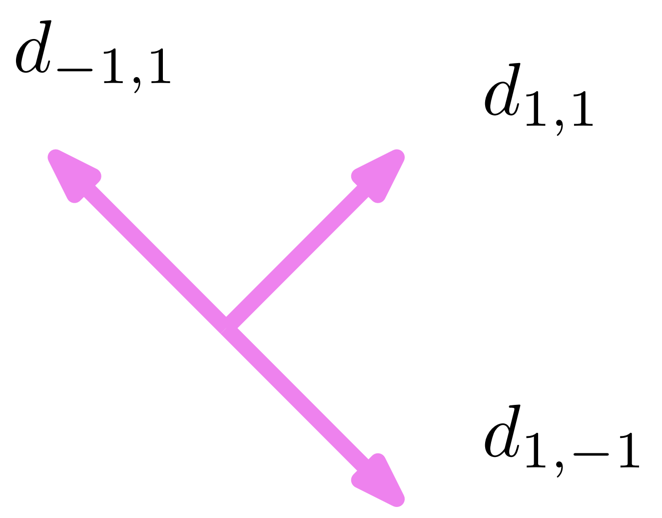
1 contact avec O_x

2 contacts avec O_y

4 pas $(1,1)$ 3 pas $(1,-1)$

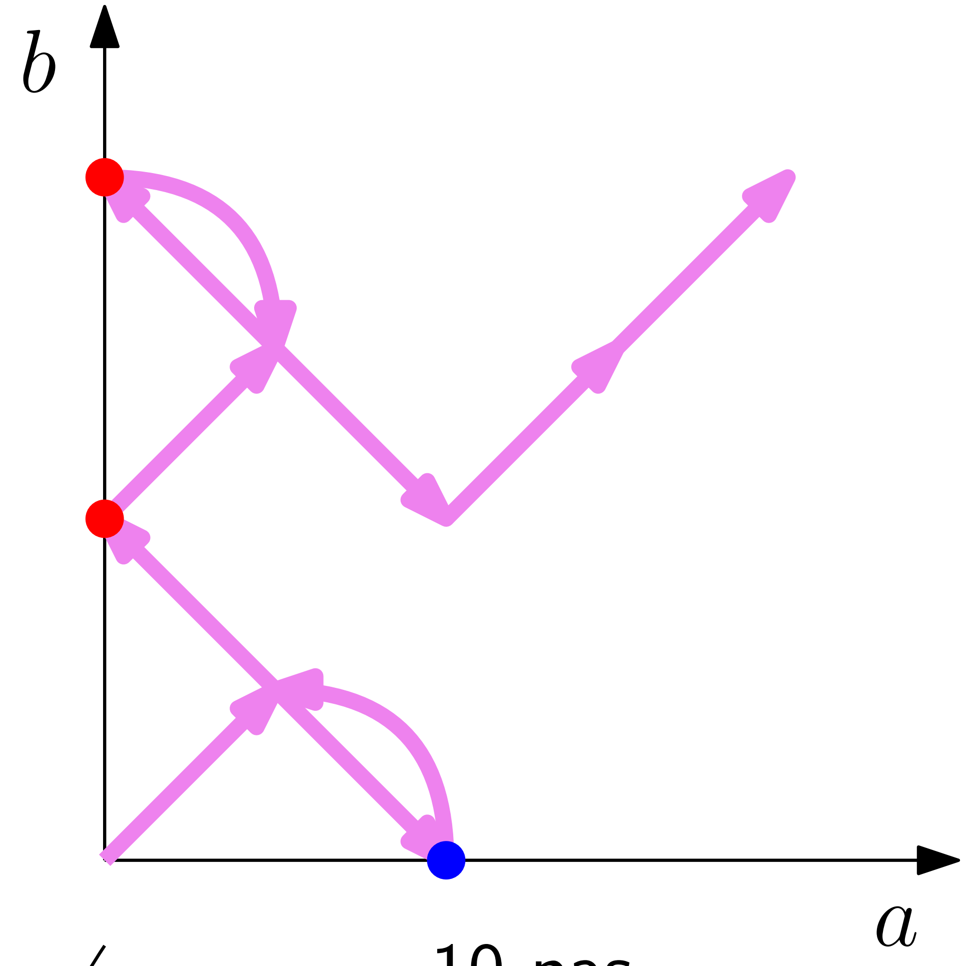
3 pas $(-1,1)$

Chemins à bords interactifs



$\mathcal{S} = \{(1,1),(1,-1),(-1,1)\}$

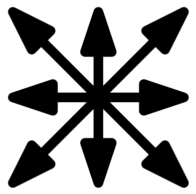
($\mathcal{S}$ est un modèle)



$d_{1,1}^4 d_{1,-1}^3 d_{-1,1}^3 a b^2 x^4 y^4 t^{10}$

10 pas
1 contact avec O_x
2 contacts avec O_y
4 pas $(1,1)$ 3 pas $(1,-1)$
3 pas $(-1,1)$

Équation fonctionnelle

$\mathcal{S} \subset$ 

$$Q(x,y) = \sum_{\text{marches}} \left(\prod_{p \in \mathcal{S}} d_p^{n_p} \right) a^{n_x} b^{n_y} x^i y^j t^n$$

$$S(x,y) = \sum_{(k,l)\in\mathcal{S}} d_{k,l} x^k y^l$$

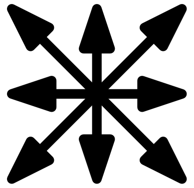
Sans interaction $(a = b = 1)$:

$$\boxed{xyK(x,y)Q(x,y) = xy - txQ(x,0) - tyQ(0,y) + tQ(0,0)}$$

Cas général :

$$\boxed{xyK(x,y)Q(x,y) = \frac{xy}{ab} + \gamma_1(x,y)Q(x,0) + \gamma_2(x,y)Q(0,y) + \gamma_3(x,y)Q(0,0).}$$

Équation fonctionnelle

$\mathcal{S} \subset$ 

$$Q(x,y) = \sum_{\text{marches}} \left(\prod_{p \in \mathcal{S}} d_p^{n_p} \right) a^{n_x} b^{n_y} x^i y^j t^n$$

$$S(x,y) = \sum_{(k,l)\in\mathcal{S}} d_{k,l} x^k y^l$$

Sans interaction $(a = b = 1)$:

$$xyK(x,y)Q(x,y) = xy - txQ(x,0) - tyQ(0,y) + tQ(0,0)$$

Méthode du noyau

Cas général :

$$xyK(x,y)Q(x,y) = \frac{xy}{ab} + \gamma_1(x,y)Q(x,0) + \gamma_2(x,y)Q(0,y) + \gamma_3(x,y)Q(0,0).$$

Méthode du noyau

$$xyK(x,y)Q(x,y) = \frac{xy}{ab} + \gamma_1(x,y)Q(x,0) + \gamma_2(x,y)Q(0,y) + \gamma_3(x,y)Q(0,0$$

Méthode du noyau

$$xyK(x,y)Q(x,y) = \frac{xy}{ab} + \gamma_1(x,y)Q(x,0) + \gamma_2(x,y)Q(0,y) + \gamma_3(x,y)Q(0,0$$

$(x,y) := (x(s), y(s))$ tel que

Méthode du noyau

$$xyK(x,y)Q(x,y) = \frac{xy}{ab}+\gamma_1(x,y)Q(x,0)+\gamma_2(x,y)Q(0,y)+\gamma_3(x,y)Q(0,0$$

$(x,y) := (x(s), y(s))$ tel que

- $K(x(s), y(s)) = 0$

Méthode du noyau

$$xyK(x,y)Q(x,y) = \frac{xy}{ab} + \gamma_1(x,y)Q(x,0) + \gamma_2(x,y)Q(0,y) + \gamma_3(x,y)Q(0,0$$

$(x,y) := (x(s), y(s))$ tel que

- $K(x(s), y(s)) = 0$
- les évaluations $Q(x(s), y(s))$, $Q(x(s), 0)$ et $Q(0, y(s))$ sont bien définies

Méthode du noyau

$$xyK(x,y)Q(x,y) = \frac{xy}{ab}+\gamma_1(x,y)Q(x,0)+\gamma_2(x,y)Q(0,y)+\gamma_3(x,y)Q(0,0$$

$$\Big\downarrow$$

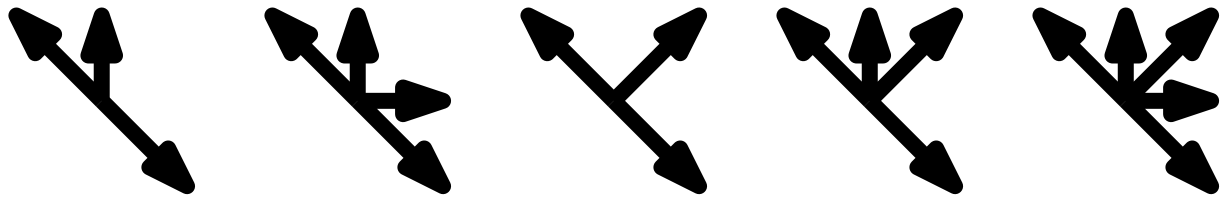
$(x,y) := (x(s),y(s))$ tel que

- $K(x(s),y(s)) = 0$
- les évaluations $Q(x(s),y(s))$, $Q(x(s),0)$ et $Q(0,y(s))$ sont bien définies

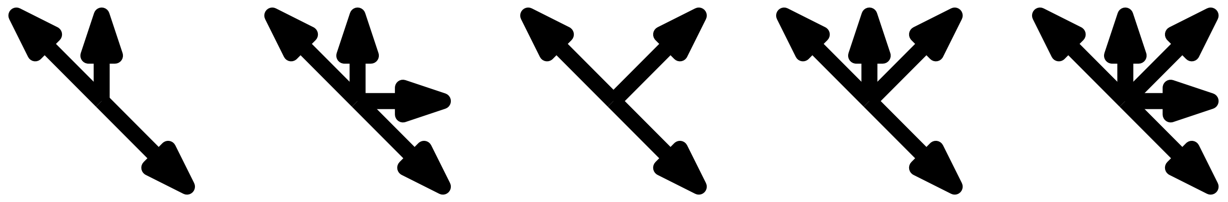
$$\cancel{x(s)y(s)K(x(s),y(s))Q(x(s),y(s))} = \frac{x(s)y(s)}{ab} + \gamma_1(x(s),y(s))Q(x(s),0)$$
$$+ \gamma_2(x(s),y(s))Q(0,y(s)) + \gamma_3(x(s),y(s))Q(0,0)$$

Cas particulier : les modèles de genre 0 [DHRS 18]

Cas particulier : les modèles de genre 0 [DHRS 18]

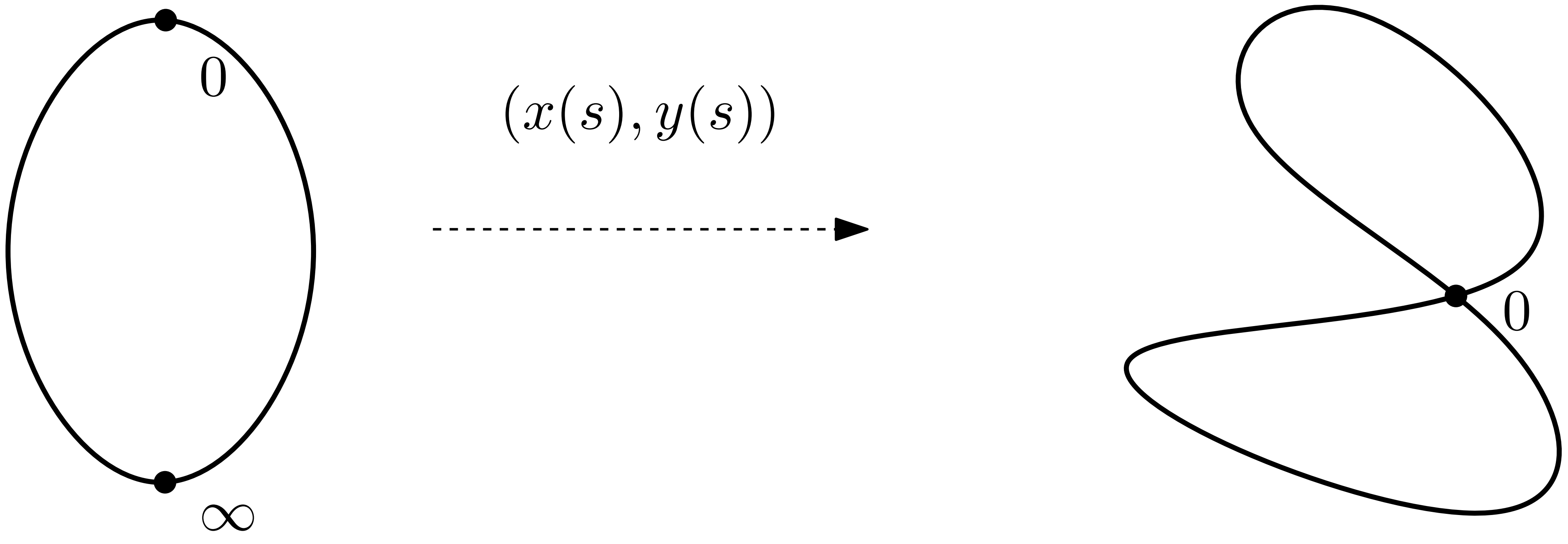


Cas particulier : les modèles de genre 0 [DHRS 18]

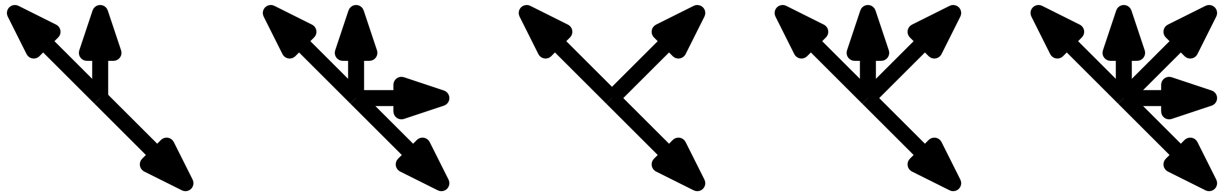


$\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

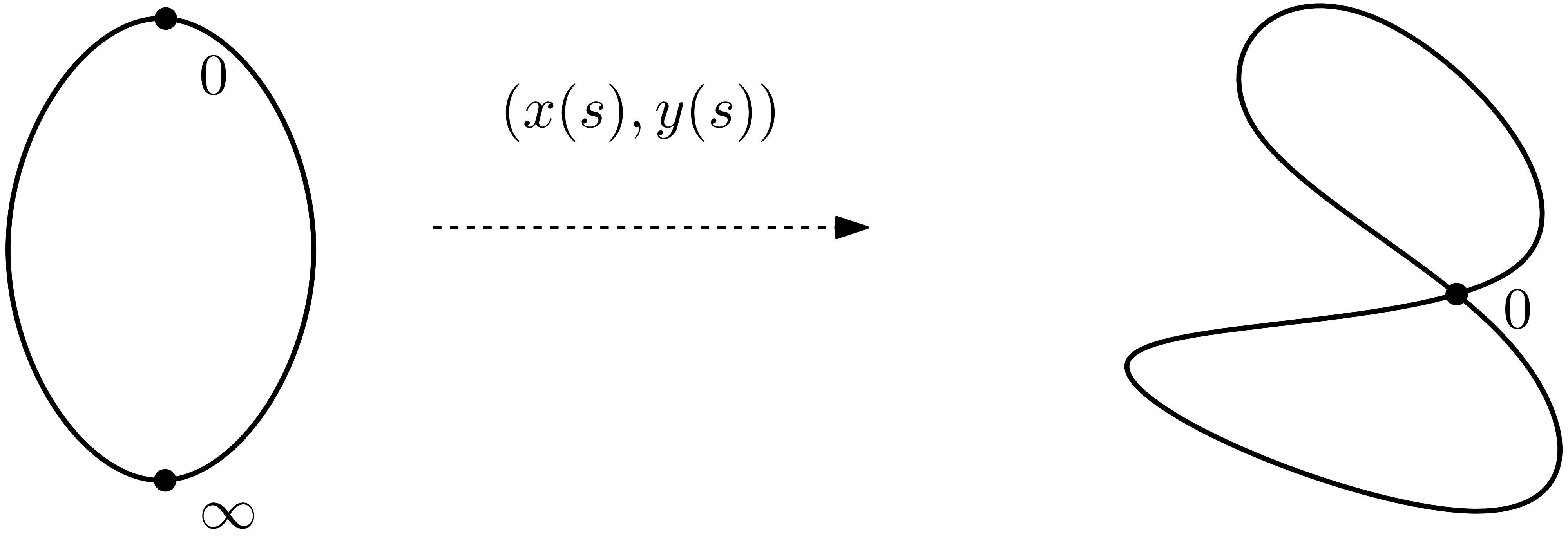
$E_t = \{(x,y) : K(x,y) = 0\} \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$



Cas particulier : les modèles de genre 0 [DHRS 18]

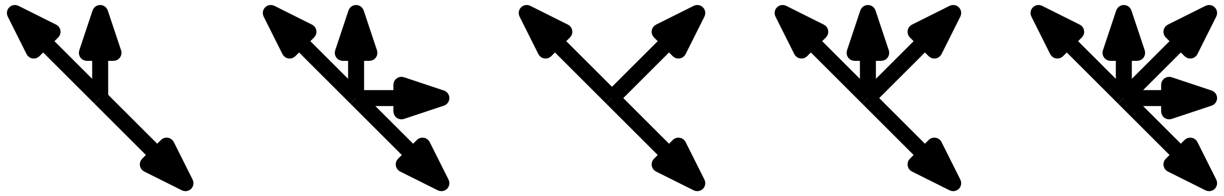


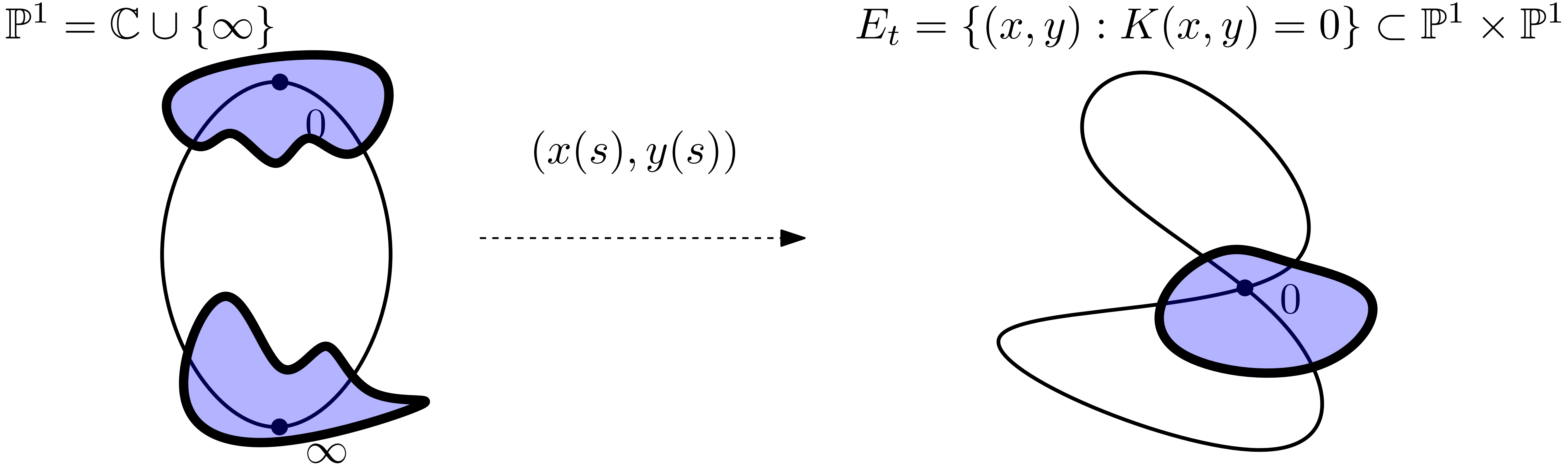
$\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ $\qquad$ $E_t = \{(x,y) : K(x,y) = 0\} \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$



- $x(s), y(s) \in \mathbb{C}(s)$ et $K(x(s), y(s)) = 0$

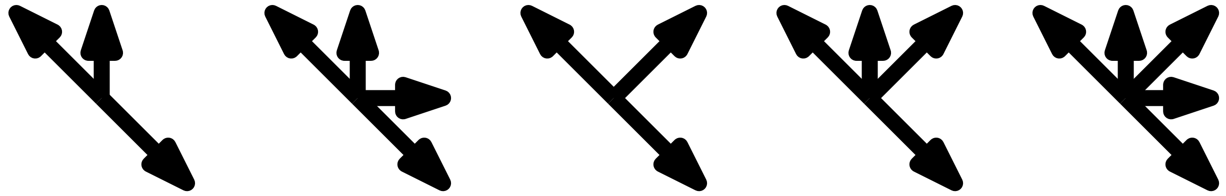
Cas particulier : les modèles de genre 0 [DHRS 18]



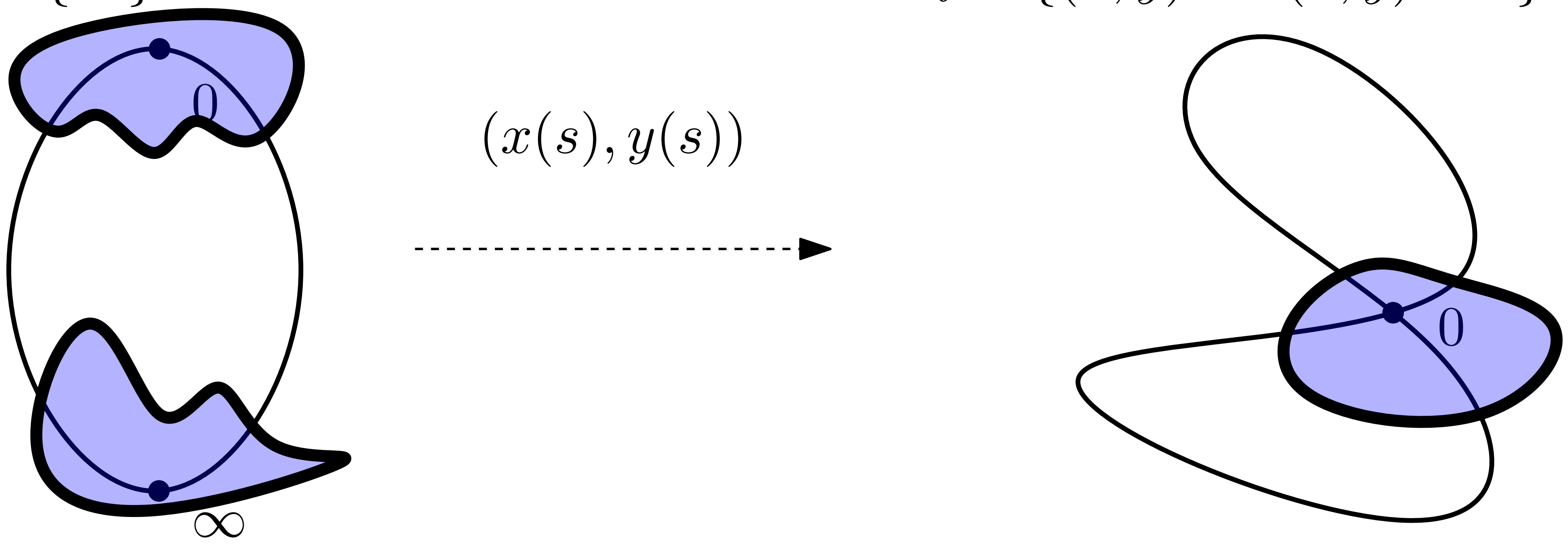


- $x(s), y(s) \in \mathbb{C}(s)$ et $K(x(s), y(s)) = 0$
- $Q(x(s), y(s))$, $Q(x(s), 0)$ et $Q(0, y(s))$ sont méromorphes pour $s \in U_0$

Cas particulier : les modèles de genre 0 [DHRS 18]



$\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ $\qquad$ $E_t = \{(x,y) : K(x,y) = 0\} \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$



- $x(s), y(s) \in \mathbb{C}(s)$ et $K(x(s), y(s)) = 0$
- $Q(x(s), y(s))$, $Q(x(s), 0)$ et $Q(0, y(s))$ sont méromorphes pour $s \in U_0$
- $\exists q > 1$, $x(1/s) = x(s)$ et $y(q/s) = y(s)$ (relèvement du groupe)

Évaluation(s) de l'équation

$$K(x,y)Q(x,y) = \omega + \gamma_1(x,y)xQ(x,0) + \gamma_2(x,y)yQ(0,y)$$

Évaluation(s) de l'équation

$$K(x,y)Q(x,y) = \omega + \gamma_1(x,y)xQ(x,0) + \gamma_2(x,y)yQ(0,y)$$

Évaluation en $(x,y) = (x(s), y(s))$ pour $s \in U_0$:

$$0 = \omega + \widetilde{\gamma}_1(s)x(s)Q(x(s),0) + \widetilde{\gamma}_2(s)y(s)Q(0,y(s))$$

$$\widetilde{\gamma}_1(s) = \gamma_1(x(s), y(s))$$
$$\widetilde{\gamma}_2(s) = \gamma_2(x(s), y(s))$$

Évaluation(s) de l'équation

$$K(x,y)Q(x,y) = \omega + \gamma_1(x,y)xQ(x,0) + \gamma_2(x,y)yQ(0,y)$$

Évaluation en $(x,y) = (x(s), y(s))$ pour $s \in U_0$:

$$0 = \omega + \widetilde{\gamma}_1(s)x(s)Q(x(s),0) + \widetilde{\gamma}_2(s)y(s)Q(0,y(s))$$

$$\widetilde{\gamma}_1(s) = \gamma_1(x(s), y(s))$$
$$\widetilde{\gamma}_2(s) = \gamma_2(x(s), y(s))$$

Évaluation en $(x,y) = (x(\frac{q}{s}), y(\frac{q}{s})) = (x(\frac{s}{q}), y(s))$ pour $s \in U_0$:

$$0 = \omega + \widetilde{\gamma}_1(\tfrac{q}{s})x(\tfrac{s}{q})Q(x(\tfrac{s}{q}),0) + \widetilde{\gamma}_2(\tfrac{q}{s})y(s)Q(0,y(s))$$

Évaluation(s) de l'équation

$$K(x,y)Q(x,y) = \omega + \gamma_1(x,y)xQ(x,0) + \gamma_2(x,y)yQ(0,y)$$

Évaluation en $(x,y) = (x(s), y(s))$ pour $s \in U_0$:

$$0 = \omega + \widetilde{\gamma}_1(s)x(s)Q(x(s),0) + \widetilde{\gamma}_2(s)y(s)Q(0,y(s))$$

$\widetilde{\gamma}_1(s) = \gamma_1(x(s), y(s))$
$\widetilde{\gamma}_2(s) = \gamma_2(x(s), y(s))$

Évaluation en $(x,y) = (x(\frac{q}{s}), y(\frac{q}{s})) = (x(\frac{s}{q}), y(s))$ pour $s \in U_0$:

$$0 = \omega + \widetilde{\gamma}_1(\tfrac{q}{s})x(\tfrac{s}{q})Q(x(\tfrac{s}{q}),0) + \widetilde{\gamma}_2(\tfrac{q}{s})y(s)Q(0,y(s))$$

Élimination :

$$x(\tfrac{s}{q})Q(x(\tfrac{s}{q}),0) = u(s) \cdot x(s)Q(x(s),0) + v(s)$$

Équation aux q-différences et classification

$$F\left(\tfrac{s}{q}\right) = u(s)F(s) + v(s)$$

$$0 = \omega + \widetilde{\gamma}_1(s)F(s) + \widetilde{\gamma}_2(s)G(s)$$

$F(s) = x(s)Q(x(s), 0)$ $\qquad$ $G(s) = y(s)Q(0, y(s))$ $\qquad$ pour $s \in U_0$

Équation aux q-différences et classification

$$F(\tfrac{s}{q}) = u(s)F(s) + v(s)$$

$$0 = \omega + \widetilde{\gamma}_1(s)F(s) + \widetilde{\gamma}_2(s)G(s)$$

$F(s) = x(s)Q(x(s), 0)$ $\quad$ $G(s) = y(s)Q(0, y(s))$ $\quad$ pour $s \in U_0$

$$\mathbb{C}(x,y)\left(\begin{array}{ccc} Q(x,y) \text{ algébrique} & \Leftrightarrow & F(s) \text{ et } G(s) \text{ algébriques} \\ Q(x,y) \text{ D-finie} & \Leftrightarrow & F(s) \text{ et } G(s) \text{ D-finies} \\ Q(x,y) \text{ D-algébrique} & \Leftrightarrow & F(s) \text{ et } G(s) \text{ D-algébriques} \end{array}\right)\mathbb{C}(s)$$

Rigidité des solutions D-algébriques

Théorème [Ishizaki 98; Adamczewski, Dreyfus, Hardouin 08]
Les solutions méromorphes sur $\mathbb{C}$ d'équations aux q-différences linéaires à coefficients rationnels sont soit **rationnelles** soit **hypertranscendantes**.

Rigidité des solutions D-algébriques

Théorème [Ishizaki 98; Adamczewski, Dreyfus, Hardouin 08]
Les solutions méromorphes sur $\mathbb{C}$ d'équations aux q-différences linéaires à coefficients rationnels sont soit **rationnelles** soit **hypertranscendantes**.

Stratégie :

Rigidité des solutions D-algébriques

Théorème [Ishizaki 98; Adamczewski, Dreyfus, Hardouin 08]
Les solutions méromorphes sur $\mathbb{C}$ d'équations aux q-différences linéaires à coefficients rationnels sont soit **rationnelles** soit **hypertranscendantes**.

Stratégie :

$Q(x, y)$ est D-algébrique $\Leftrightarrow$ $F(s)$ est D-algébrique $\Leftrightarrow$ $F(s)$ rationnelle

Rigidité des solutions D-algébriques

Théorème [Ishizaki 98; Adamczewski, Dreyfus, Hardouin 08]
Les solutions méromorphes sur $\mathbb{C}$ d'équations aux q-différences linéaires à coefficients rationnels sont soit **rationnelles** soit **hypertranscendantes**.

Stratégie :

$Q(x, y)$ est D-algébrique $\Leftrightarrow$ $F(s)$ est D-algébrique $\Leftrightarrow$ $F(s)$ rationnelle

- si (E) a une unique solution, rationnelle, on montre que $Q(x, y)$ est **algébrique**

Rigidité des solutions D-algébriques

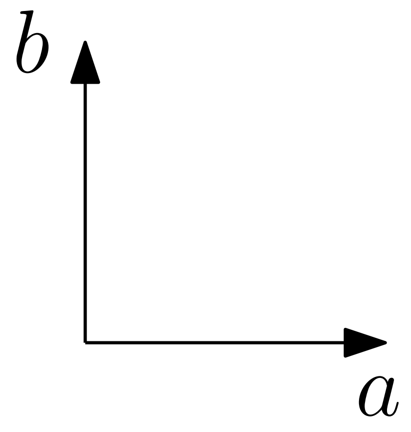
Théorème [Ishizaki 98; Adamczewski, Dreyfus, Hardouin 08]
Les solutions méromorphes sur $\mathbb{C}$ d'équations aux q-différences linéaires à coefficients rationnels sont soit **rationnelles** soit **hypertranscendantes**.

Stratégie :

$Q(x, y)$ est D-algébrique $\Leftrightarrow$ $F(s)$ est D-algébrique $\Leftrightarrow$ $F(s)$ rationnelle

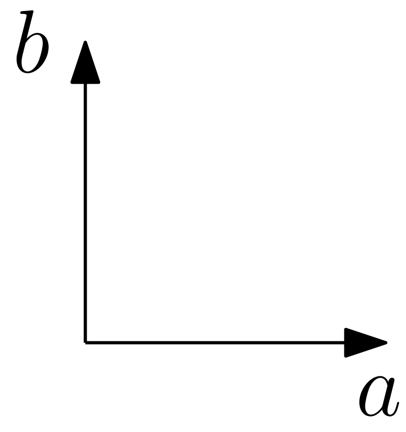
- si (E) a une unique solution, rationnelle, on montre que $Q(x, y)$ est **algébrique**
- si (E) n'a pas de solution rationnelle, on montre que $Q(x, y)$ est **hypertranscendante**

Cas sans interaction : $\mathbf{a = b = 1}$



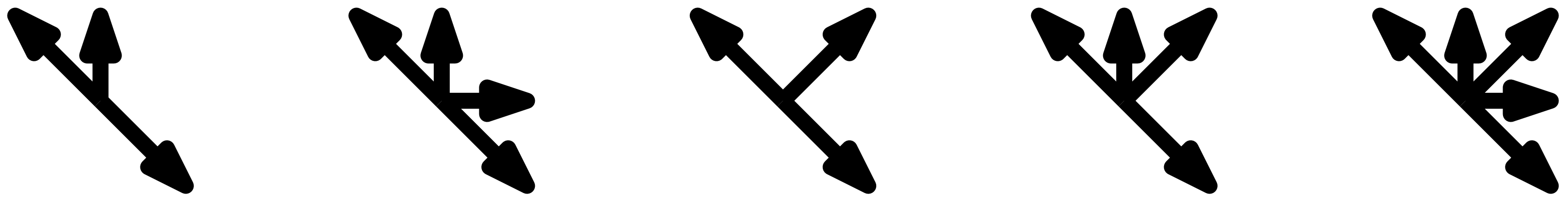
$$F(\tfrac{s}{q}) = F(s) + v(s)$$

Cas sans interaction : $\mathrm{a} = \mathrm{b} = 1$

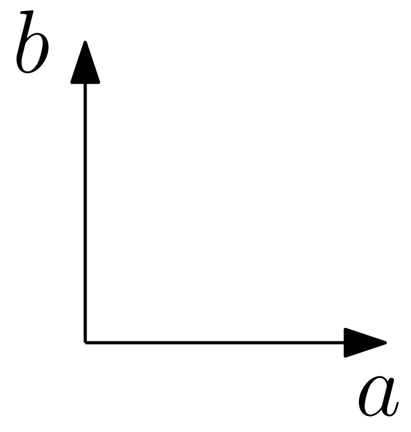


$$F\left(\frac{s}{q}\right) = F(s) + v(s)$$

Théorème [Dreyfus, Hardouin, Roques, Singer 18]

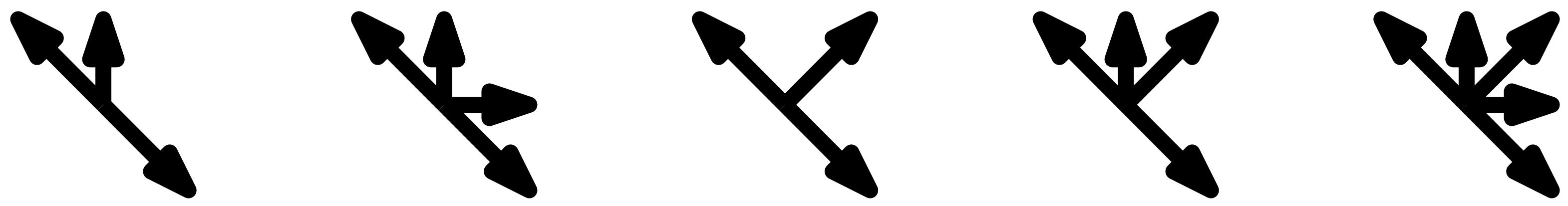


Cas sans interaction : $\mathrm{a} = \mathrm{b} = 1$



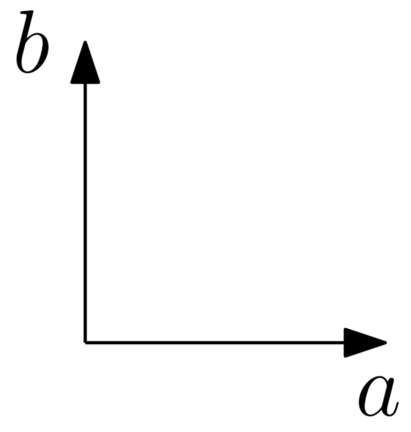
$$F(\tfrac{s}{q}) = F(s) + v(s)$$

Théorème [Dreyfus, Hardouin, Roques, Singer 18]



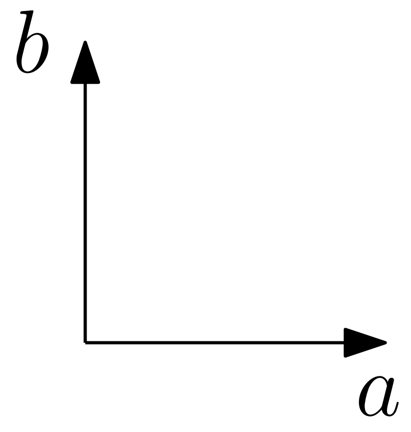
Pour tous les poids $d_{i,j}$, la série $Q(x,y)$ est **hypertranscendante**.

Cas général : a et b quelconques



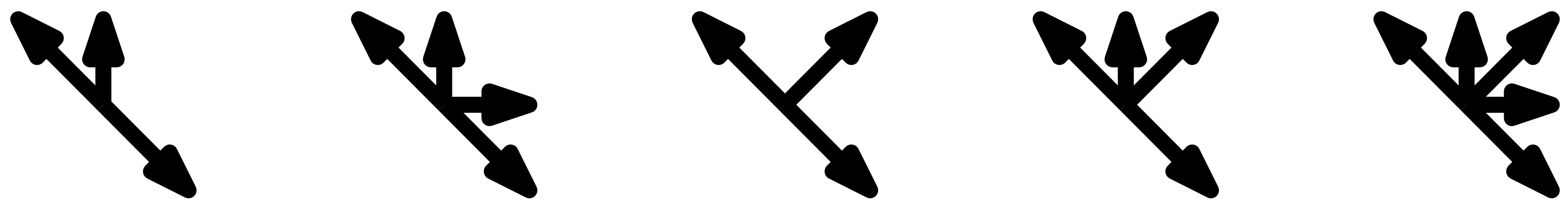
$$F(\tfrac{s}{q}) = u(s)F(s) + v(s)$$

Cas général : a et b quelconques

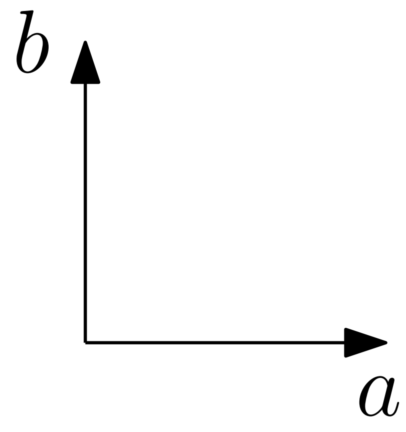


$$F(\tfrac{s}{q}) = u(s)F(s) + v(s)$$

Theorème [B. 26+]

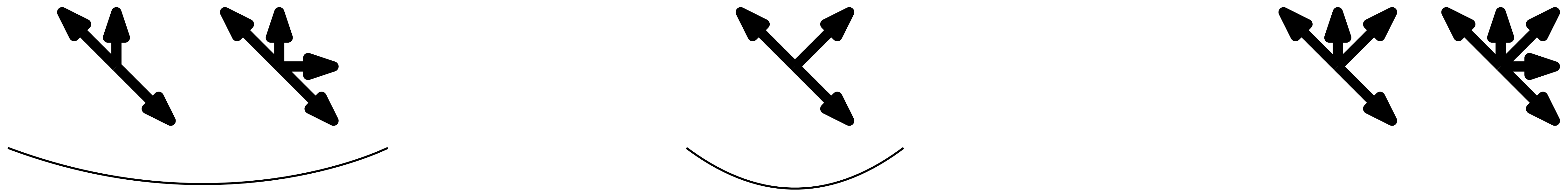


Cas général : a et b quelconques



$$F(\tfrac{s}{q}) = u(s)F(s) + v(s)$$

Theorème [B. 26+]



Rationnels ssi $a + b = ab$ **Algébrique** ssi $a = b = 2$

Pour tous les autres poids a et b, la série $Q(x, y)$ est **hypertranscendante**.

Localisation des pôles

$$\boxed{F(\tfrac{s}{q}) = u(s)F(s) + v(s)}$$

Localisation des pôles

zéros	pôles

$$F\left(\frac{s}{q}\right) = \boxed{u(s)}F(s) + \boxed{v(s)}$$

Localisation des pôles

zéros pôles

$$F(\tfrac{s}{q}) = \underbrace{u(s)}_{} F(s) + v(s)$$

Lemme [B. 26+] Il existe des ensembles finis $\mathcal{L}^-$ et $\mathcal{L}^+$ (dépendants de $u(s)$ et $v(s)$) tels que pour s un pôle de F:

- si $s \notin \mathcal{L}^-$ alors $\frac{s}{q}$ est un pôle de F
- si $s \notin \mathcal{L}^+$ alors qs est un pôle de F

Localisation des pôles

zéros pôles

$$F\left(\frac{s}{q}\right) = \boxed{u(s)}\,F(s) + \boxed{v(s)}$$

Lemme [B. 26+] Il existe des ensembles finis $\mathcal{L}^-$ et $\mathcal{L}^+$ (dépendants de $u(s)$ et $v(s)$) tels que pour s un pôle de F:

- si $s \notin \mathcal{L}^-$ alors $\frac{s}{q}$ est un pôle de F
- si $s \notin \mathcal{L}^+$ alors qs est un pôle de F

Corollaire [B. 26+] Si F est une solution rationnelle de (E), et $s \notin \{0, \infty\}$ est un pôle de F, alors s est de la forme suivante :

Localisation des pôles

zéros   pôles

$$F(\tfrac{s}{q}) = \boxed{u(s)}F(s) + \boxed{v(s)}$$

Lemme [B. 26+] Il existe des ensembles finis $\mathcal{L}^-$ et $\mathcal{L}^+$ (dépendants de $u(s)$ et $v(s)$) tels que pour s un pôle de F:

- si $s \notin \mathcal{L}^-$ alors $\frac{s}{q}$ est un pôle de F
- si $s \notin \mathcal{L}^+$ alors qs est un pôle de F

Corollaire [B. 26+] Si F est une solution rationnelle de (E), et $s \notin \{0, \infty\}$ est un pôle de F, alors s est de la forme suivante :

$$s \longrightarrow qs \longrightarrow q^2 s \longrightarrow \dots \longrightarrow q^n s \in \mathcal{L}^+$$

Localisation des pôles

zéros　　　pôles

$$F(\tfrac{s}{q}) = \boxed{u(s)}F(s) + \boxed{v(s)}$$

Lemme [B. 26+] Il existe des ensembles finis $\mathcal{L}^-$ et $\mathcal{L}^+$ (dépendants de $u(s)$ et $v(s)$) tels que pour s un pôle de F:

- si $s \notin \mathcal{L}^-$ alors $\frac{s}{q}$ est un pôle de F
- si $s \notin \mathcal{L}^+$ alors qs est un pôle de F

Corollaire [B. 26+] Si F est une solution rationnelle de (E), et $s \notin \{0, \infty\}$ est un pôle de F, alors s est de la forme suivante :

$$q^{-m}s \in \mathcal{L}^- \longleftarrow \dots \longleftarrow \frac{s}{q^2} \longleftarrow \frac{s}{q} \longleftarrow s \longrightarrow qs \longrightarrow q^2s \longrightarrow \dots \longrightarrow q^n s \in \mathcal{L}^+$$

Localisation des pôles

zéros pôles

$$F(\tfrac{s}{q}) = \boxed{u(s)}F(s) + \boxed{v(s)}$$

Stratégie synthétique

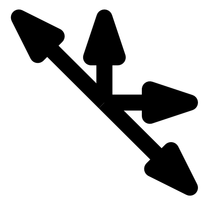
- S'il existe une solution rationnelle $F(s)$ sans pôles triviaux, alors on a

$$
\begin{tikzcd}
s^- \in \mathcal{L}^- \arrow[r, bend left, "q^n"] & s^+ \in \mathcal{L}^+
\end{tikzcd}
$$

- Sinon, toute solution rationnelle a ses pôles dans $0, \infty$.

Localisation des pôles sur un exemple

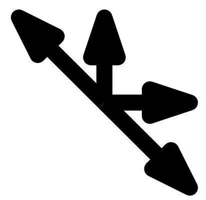
Notation s'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $q^n s^- = s^+$ on écrit n, sinon $\perp$



$\mathcal{L}^-$ \ $\mathcal{L}^+$	$\frac{1}{s_1}$	$\frac{1}{s_2}$	$\frac{s_3}{q}$	$\frac{s_4}{q}$
s_1				
s_2				
$\frac{q}{s_3}$				
$\frac{q}{s_4}$				

Localisation des pôles sur un exemple

Notation s'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $q^n s^- = s^+$ on écrit n, sinon $\perp$



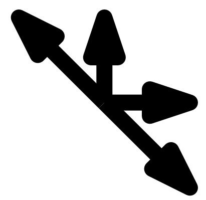
$\mathcal{L}^-$ \ $\mathcal{L}^+$	$\frac{1}{s_1}$	$\frac{1}{s_2}$	$\frac{s_3}{q}$	$\frac{s_4}{q}$
s_1	$\perp$	-1 si $a = 1$ $\perp$ sinon	-1	$\perp$
s_2		$\perp$	$\perp$	0 si $a + b = ab$ -2 si $a = b = 1$ $\perp$ sinon
$\frac{q}{s_3}$			$\perp$	-2 si $b = 1$ $\perp$ sinon
$\frac{q}{s_4}$				$\perp$

Localisation des pôles sur un exemple

Notation s'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $q^n s^- = s^+$ on écrit n, sinon $\perp$

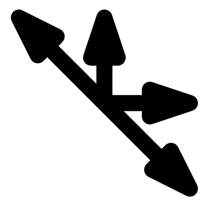
$\mathcal{L}^-$ \ $\mathcal{L}^+$	$\frac{1}{s_1}$	$\frac{1}{s_2}$	$\frac{s_3}{q}$	$\frac{s_4}{q}$
s_1	$\perp$	-1 si $a = 1$ $\perp$ sinon	-1	$\perp$
s_2		$\perp$	$\perp$	0 si $a + b = ab$ -2 si $a = b = 1$ $\perp$ sinon
$\frac{q}{s_3}$			$\perp$	-2 si $b = 1$ $\perp$ sinon
$\frac{q}{s_4}$				$\perp$

Exemple d'un des modèles



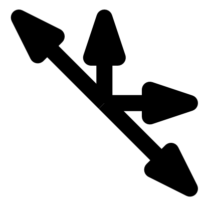
- Supposons que $a+b \neq ab$ et que $\mathbf{Q}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ est D-algébrique

Exemple d'un des modèles



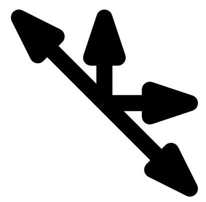
- Supposons que $a + b \neq ab$ et que $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est D-algébrique
  - $F(s)$ est rationnelle par rigidité des solutions D-alg des équations aux q-différences

Exemple d'un des modèles



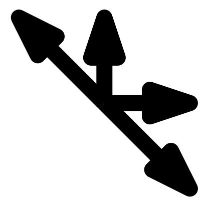
- Supposons que $a + b \neq ab$ et que $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est D-algébrique
  - $F(s)$ est rationnelle par rigidité des solutions D-alg des équations aux q-différences
  - on montre que si $a + b \neq ab$, les seuls pôles de F sont 0 et ∞

Exemple d'un des modèles



- Supposons que $a + b \neq ab$ et que $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est D-algébrique
  - $F(s)$ est rationnelle par rigidité des solutions D-alg des équations aux q-différences
  - on montre que si $a + b \neq ab$, les seuls pôles de F sont 0 et ∞
  - on montre que F est nécessairement une fonction de $x(s)$

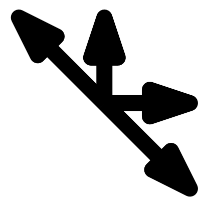
Exemple d'un des modèles



- Supposons que $a+b \neq ab$ et que $\mathbf{Q}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ est D-algébrique
  - $F(s)$ est rationnelle par rigidité des solutions D-alg des équations aux q-différences
  - on montre que si $a+b \neq ab$, les seuls pôles de F sont 0 et ∞
  - on montre que F est nécessairement une fonction de $x(s)$

  $\Rightarrow F(s) = P(\frac{1}{x(s)}) \Rightarrow x(s)Q(x(s),0) = P(\frac{1}{x(s)}) \Rightarrow xQ(x,0) \in \mathbb{C}[\frac{1}{x}]$, **absurde**

Exemple d'un des modèles



- Supposons que $a+b \neq ab$ et que $\mathbf{Q}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ est D-algébrique

  - $F(s)$ est rationnelle par rigidité des solutions D-alg des équations aux q-différences

  - on montre que si $a+b \neq ab$, les seuls pôles de F sont 0 et ∞

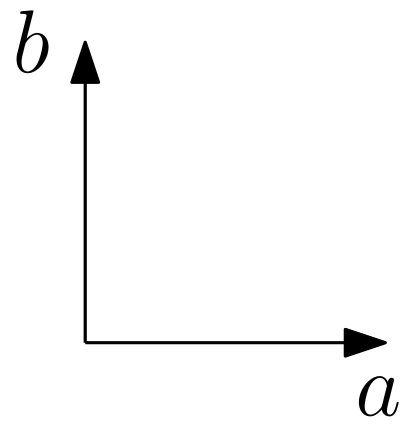
  - on montre que F est nécessairement une fonction de $x(s)$

  $\Rightarrow F(s) = P(\frac{1}{x(s)}) \Rightarrow x(s)Q(x(s),0) = P(\frac{1}{x(s)}) \Rightarrow xQ(x,0) \in \mathbb{C}[\frac{1}{x}]$, **absurde**

- Si $a+b=ab$, on trouve une unique solution (!) :

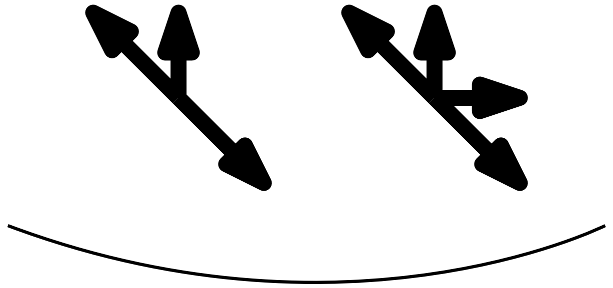
$$Q(x,0) = \frac{1}{1 - x\frac{ad_{1,0}t + abd_{1,-1}d_{0,1}t^2}{1-abd_{1,-1}d_{-1,1}t^2}} \quad Q(0,y) \quad = \frac{1}{1 - y\frac{bd_{0,1}t + abd_{-1,1}d_{1,0}t^2}{1-abd_{1,-1}d_{-1,1}t^2}}$$

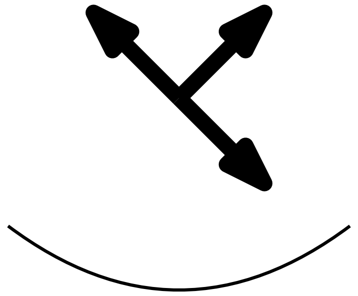
Bilan

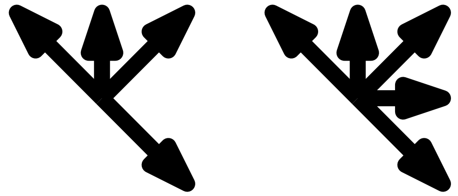


$$F(\tfrac{s}{q}) = u(s)F(s) + v(s)$$

Theorème [B. 26+]



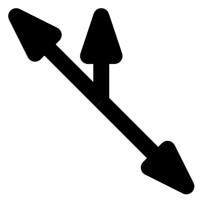


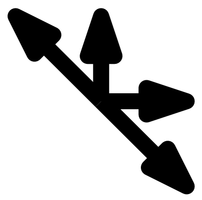


Rationnels ssi $a + b = ab$ **Algébrique** ssi $a = b = 2$

Pour tous les autres poids a et b, la série $Q(x, y)$ est **hypertranscendante**.

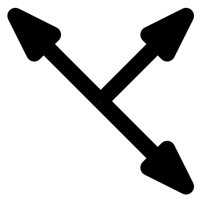
Les cas algébriques





$$a = 1 + \varepsilon$$
$$b = 1 + \frac{1}{\varepsilon}$$

$$Q(x,0) = \frac{1}{1 - x\frac{ad_{1,0}t + abd_{1,-1}d_{0,1}t^2}{1 - abd_{1,-1}d_{-1,1}t^2}}$$
$$Q(0,y) = \frac{1}{1 - y\frac{bd_{0,1}t + abd_{-1,1}d_{1,0}t^2}{1 - abd_{1,-1}d_{-1,1}t^2}}$$



$$a = b = 2$$

$$Q(x,0) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2\frac{4d_{1,1}d_{1,-1}t^2}{1 - 4d_{1,-1}d_{-1,1}t^2}}}$$
$$Q(0,y) = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2\frac{4d_{1,1}d_{-1,1}t^2}{1 - 4d_{1,-1}d_{-1,1}t^2}}}$$

Projets futurs

Projets futurs

- Comprendre les modèles algébriques de genre 0

Projets futurs

- Comprendre les modèles algébriques de genre 0
    - Trouver d'autres modèles algébriques

Projets futurs

- Comprendre les modèles algébriques de genre 0
    - Trouver d'autres modèles algébriques
- Traiter les autres modèles à petits pas

Projets futurs

- Comprendre les modèles algébriques de genre 0
    - Trouver d'autres modèles algébriques
- Traiter les autres modèles à petits pas
- Reconstituer le diagramme de phases

MERCI