Pierre Bonnet
en collaboration avec Charlotte Hardouin

LaBRI

14 Novembre 2023
Rencontres orbitales

Plan

Introduction

Orbite et formalisme Galoisien

Invariants et découplage

Plan

Le groupe de la marche

(Fayolle, puis Bousquet-Mélou et Mishna)

Pour les petits pas, on écrit

$$\begin{aligned} S(X,Y) &= A_{-1}(X)Y^{-1} + A_0(X) + A_1(X)Y \\ &= B_{-1}(Y)X^{-1} + B_0(Y) + B_1(Y)X \end{aligned}$$

On définit deux transformations birationnelles de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$

$$\Phi\colon (X,Y) \mapsto \left(\frac{A_1(X)}{YA_{-1}(X)}, Y\right) \quad \Psi\colon (X,Y) \mapsto \left(X, \frac{B_1(Y)}{XB_{-1}(Y)}\right)$$

$S(u,v) = S(u,v')$ ssi $(u,v') = (u,v)$ ou $(u,v') = \Psi(u,v)$.

Le *groupe de la marche* est $G = \langle \Phi, \Psi \rangle$.

Le groupe de la marche

(Fayolle, puis Bousquet-Mélou et Mishna)

Pour les petits pas, on écrit

$$\begin{aligned} S(X,Y) &= A_{-1}(X)Y^{-1} + A_0(X) + A_1(X)Y \\ &= B_{-1}(Y)X^{-1} + B_0(Y) + B_1(Y)X \end{aligned}$$

On définit deux transformations birationnelles de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$

$$\Phi\colon (X,Y) \mapsto \left(\frac{A_1(X)}{YA_{-1}(X)}, Y\right) \quad \Psi\colon (X,Y) \mapsto \left(X, \frac{B_1(Y)}{XB_{-1}(Y)}\right)$$

$S(u,v) = S(u,v')$ ssi $(u,v') = (u,v)$ ou $(u,v') = \Psi(u,v)$.

Le *groupe de la marche* est $G = \langle \Phi, \Psi \rangle$.

Le groupe de la marche

(Fayolle, puis Bousquet-Mélou et Mishna)

Pour les petits pas, on écrit

$$\begin{aligned} S(X,Y) &= A_{-1}(X)Y^{-1} + A_0(X) + A_1(X)Y \\ &= B_{-1}(Y)X^{-1} + B_0(Y) + B_1(Y)X \end{aligned}$$

On définit deux transformations birationnelles de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$

$$\Phi \colon (X,Y) \mapsto \left(\frac{A_1(X)}{YA_{-1}(X)}, Y \right) \quad \Psi \colon (X,Y) \mapsto \left(X, \frac{B_1(Y)}{XB_{-1}(Y)} \right)$$

$S(u,v) = S(u,v')$ ssi $(u,v') = (u,v)$ ou $(u,v') = \Psi(u,v)$.

Le *groupe de la marche* est $G = \langle \Phi, \Psi \rangle$.

Le groupe de la marche

(Fayolle, puis Bousquet-Mélou et Mishna)

Pour les petits pas, on écrit

$$\begin{aligned} S(X,Y) &= A_{-1}(X)Y^{-1} + A_0(X) + A_1(X)Y \\ &= B_{-1}(Y)X^{-1} + B_0(Y) + B_1(Y)X \end{aligned}$$

On définit deux transformations birationnelles de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$

$$\Phi\colon (X,Y) \mapsto \left(\frac{A_1(X)}{YA_{-1}(X)}, Y\right) \quad \Psi\colon (X,Y) \mapsto \left(X, \frac{B_1(Y)}{XB_{-1}(Y)}\right)$$

$S(u,v) = S(u,v')$ ssi $(u,v') = (u,v)$ ou $(u,v') = \Psi(u,v)$.

Le *groupe de la marche* est $G = \langle \Phi, \Psi \rangle$.

Orbite du groupe de la marche

$$
\begin{tikzcd}
& (x,y) \arrow[dl, dash, "\Psi"'] \arrow[dr, dash, "\Phi"] & \\
(x,\bar{x}\bar{y}) \arrow[d, dash, "\Phi"'] & & (\bar{x}\bar{y},y) \arrow[d, dash, "\Psi"] \\
(y,\bar{x}\bar{y}) \arrow[dr, dash, "\Psi"'] & & (\bar{x}\bar{y},x) \arrow[dl, dash, "\Phi"] \\
& (y,x) &
\end{tikzcd}
$$

$$\Psi(u,v) = (u,\bar{u}\bar{v})$$

$$\Phi(u,v) = (\bar{u}\bar{v},v)$$

$$G = \langle \Phi, \Psi \rangle \simeq D_6$$

Exemple de simplification

$$
\begin{aligned}
xyK(x,y,t)Q(x,y,t) &= xy - R(x,t) - S(y,t)\\
x_1yK(x,y)Q(\overline{x}y,y) &= x_1y - R(x_1,t) - S(y,t)\\
x_1y_1K(x,y,t)Q(x,y,t) &= x_1y_2 - R(x_1,t) - S(y_1,t)\\
&\dots
\end{aligned}
$$

$$K(x,y,t)\left(xyQ(x,y,t)+G(x,y,t)\right) = H(x,y,t)$$

$$xyQ(x,y,t) = \left[x^{>}y^{>}\right] H(x,y,t)/K(x,y,t)$$

Exemple de simplification

$$
\begin{aligned}
xyK(x,y,t)Q(x,y,t) &= xy - R(x,t) - S(y,t)\\
x_1yK(x,y)Q(\overline{x}y,y) &= x_1y - R(x_1,t) - S(y,t)\\
x_1y_1K(x,y,t)Q(x,y,t) &= x_1y_2 - R(x_1,t) - S(y_1,t)\\
&\dots
\end{aligned}
$$

$$K(x,y,t)\left(xyQ(x,y,t)+G(x,y,t)\right) = H(x,y,t)$$

$$xyQ(x,y,t) = \left[x^{>}y^{>}\right] H(x,y,t)/K(x,y,t)$$

Exemple de simplification

$$xyK(x,y,t)Q(x,y,t) = xy - R(x,t) - S(y,t)$$
$$x_1yK(x,y)Q(\overline{x}y,y) = x_1y - R(x_1,t) - S(y,t)$$
$$x_1y_1K(x,y,t)Q(x,y,t) = x_1y_2 - R(x_1,t) - S(y_1,t)$$
$$\ldots$$

$$K(x,y,t)\,(xyQ(x,y,t) + G(x,y,t)) = H(x,y,t)$$

$$xyQ(x,y,t) = \left[x^{>}y^{>}\right] H(x,y,t)/K(x,y,t)$$

Orbite (tout court)

(Bostan, Bousquet-Mélou, Melczer)

$\mathcal{W}$ modèle 2D à poids non trivial, $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{C}(x,y)}$

Pour $(u,v) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ avec $S(u,v) = S(u',v')$:

- $(u,v) \sim^x (u',v')$ si $u = u'$
- $(u,v) \sim^y (u',v')$ si $v = v'$
- $(u,v) \sim (u',v')$ si $(u,v) \sim^x (u',v')$ ou $(u,v) \sim^y (u',v')$

L'*orbite* est l'ensemble des paires (u,v) telles que $(x,y) \sim^* (u,v)$, et est notée $\mathcal{O}$.

$$S(x,y) = S(x,y') = S(x',y') = \cdots = S(u,v)$$

Orbite (tout court)

(Bostan, Bousquet-Mélou, Melczer)

$\mathcal{W}$ modèle 2D à poids non trivial, $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{C}(x, y)}$

Pour $(u, v) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ avec $S(u, v) = S(u', v')$:

- $(u, v) \sim^x (u', v')$ si $u = u'$
- $(u, v) \sim^y (u', v')$ si $v = v'$
- $(u, v) \sim (u', v')$ si $(u, v) \sim^x (u', v')$ ou $(u, v) \sim^y (u', v')$

L'*orbite* est l'ensemble des paires (u, v) telles que $(x, y) \sim^* (u, v)$, et est notée $\mathcal{O}$.

$$S(x, y) = S(x, y') = S(x', y') = \cdots = S(u, v)$$

Orbite (tout court)

(Bostan, Bousquet-Mélou, Melczer)

$\mathcal{W}$ modèle 2D à poids non trivial, $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{C}(x, y)}$

Pour $(u, v) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ avec $S(u, v) = S(u', v')$:

- $(u, v) \sim^x (u', v')$ si $u = u'$
- $(u, v) \sim^y (u', v')$ si $v = v'$
- $(u, v) \sim (u', v')$ si $(u, v) \sim^x (u', v')$ ou $(u, v) \sim^y (u', v')$

L'*orbite* est l'ensemble des paires (u, v) telles que $(x, y) \sim^* (u, v)$, et est notée $\mathcal{O}$.

$$S(x, y) = S(x, y') = S(x', y') = \cdots = S(u, v)$$

Orbite (tout court)

(Bostan, Bousquet-Mélou, Melczer)

$\mathcal{W}$ modèle 2D à poids non trivial, $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{C}(x, y)}$

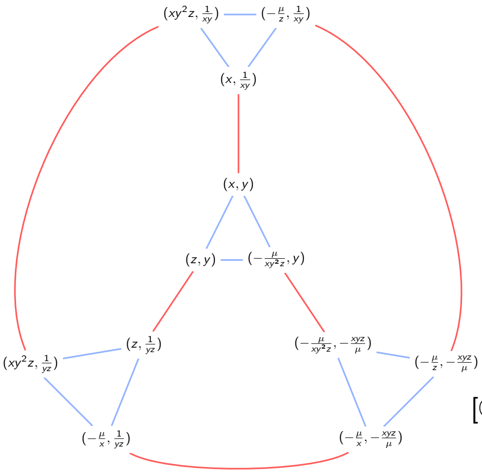
Pour $(u, v) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ avec $S(u, v) = S(u', v')$:

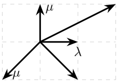
- $(u, v) \sim^x (u', v')$ si $u = u'$
- $(u, v) \sim^y (u', v')$ si $v = v'$
- $(u, v) \sim (u', v')$ si $(u, v) \sim^x (u', v')$ ou $(u, v) \sim^y (u', v')$

L'*orbite* est l'ensemble des paires (u, v) telles que $(x, y) \sim^* (u, v)$, et est notée $\mathcal{O}$.

$$S(x, y) = S(x, y') = S(x', y') = \cdots = S(u, v)$$

Exemple à grands pas ($\mathcal{G}^{\lambda,\mu}$)





$$[\mathbb{C}(x,y,z) : \mathbb{C}(x,y)] = 2$$

Action d'automorphismes de corps

Rappel : si $\mathbb{K}/L$ est une extension de corps, un L-automorphisme de $\mathbb{K}$ est un homomorphisme d'anneaux $\sigma : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ qui vérifie $\sigma_{|L} = \mathrm{id}_L$.

Pour σ un $\mathbb{C}$-automorphisme de $\mathbb{K}$, on définit $\sigma \cdot (u, v) = (\sigma(u), \sigma(v))$

Soit (u, v) dans $\mathcal{O}$ et σ un $\mathbb{C}$-automorphisme de $\mathbb{K}$.

$S(x, y) = S(x, y') = S(x', y') = \cdots = S(u, v)$

$S(\sigma(x), \sigma(y)) = S(\sigma(x), \sigma(y')) = S(\sigma(x'), \sigma(y')) = \cdots = S(\sigma(u), \sigma(v))$

Si de plus σ fixe x et $S(x, y)$ on a

$S(x, y) = S(x, \sigma(y)) = S(\sigma(x), \sigma(y)) = \cdots = S(\sigma(u), \sigma(v))$

Conclusion : $(x, y) \sim \sigma \cdot (x, y) \sim \cdots \sim \sigma \cdot (u, v)$

L'orbite est stable sous cette action de $\mathbb{C}(S(x, y), x)$-automorphismes de $\mathbb{K}$ et $\mathbb{C}(S(x, y), y)$-automorphismes de $\mathbb{K}$, qui préservent les adjacences.

Action d'automorphismes de corps

Rappel : si $\mathbb{K}/L$ est une extension de corps, un L-automorphisme de $\mathbb{K}$ est un homomorphisme d'anneaux $\sigma : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ qui vérifie $\sigma_{|L} = \mathrm{id}_L$.

Pour σ un $\mathbb{C}$-automorphisme de $\mathbb{K}$, on définit $\sigma \cdot (u, v) = (\sigma(u), \sigma(v))$

Soit (u, v) dans $\mathcal{O}$ et σ un $\mathbb{C}$-automorphisme de $\mathbb{K}$.

$S(x, y) = S(x, y') = S(x', y') = \cdots = S(u, v)$

$S(\sigma(x), \sigma(y)) = S(\sigma(x), \sigma(y')) = S(\sigma(x'), \sigma(y')) = \cdots = S(\sigma(u), \sigma(v))$

Si de plus σ fixe x et $S(x, y)$ on a

$S(x, y) = S(x, \sigma(y)) = S(\sigma(x), \sigma(y)) = \cdots = S(\sigma(u), \sigma(v))$

Conclusion : $(x, y) \sim \sigma \cdot (x, y) \sim \cdots \sim \sigma \cdot (u, v)$

L'orbite est stable sous cette action de $\mathbb{C}(S(x, y), x)$-automorphismes de $\mathbb{K}$ et $\mathbb{C}(S(x, y), y)$-automorphismes de $\mathbb{K}$, qui préservent les adjacences.

Action d'automorphismes de corps

Rappel : si $\mathbb{K}/L$ est une extension de corps, un L-automorphisme de $\mathbb{K}$ est un homomorphisme d'anneaux $\sigma : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ qui vérifie $\sigma_{|L} = \mathrm{id}_L$.

Pour σ un $\mathbb{C}$-automorphisme de $\mathbb{K}$, on définit $\sigma \cdot (u, v) = (\sigma(u), \sigma(v))$

Soit (u, v) dans $\mathcal{O}$ et σ un $\mathbb{C}$-automorphisme de $\mathbb{K}$.

$S(x, y) = S(x, y') = S(x', y') = \cdots = S(u, v)$

$S(\sigma(x), \sigma(y)) = S(\sigma(x), \sigma(y')) = S(\sigma(x'), \sigma(y')) = \cdots = S(\sigma(u), \sigma(v))$

Si de plus σ fixe x et $S(x, y)$ on a

$S(x, y) = S(x, \sigma(y)) = S(\sigma(x), \sigma(y)) = \cdots = S(\sigma(u), \sigma(v))$

Conclusion : $(x, y) \sim \sigma \cdot (x, y) \sim \cdots \sim \sigma \cdot (u, v)$

L'orbite est stable sous cette action de $\mathbb{C}(S(x, y), x)$-automorphismes de $\mathbb{K}$ et $\mathbb{C}(S(x, y), y)$-automorphismes de $\mathbb{K}$, qui préservent les adjacences.

Action d'automorphismes de corps

Rappel : si $\mathbb{K}/L$ est une extension de corps, un L-automorphisme de $\mathbb{K}$ est un homomorphisme d'anneaux $\sigma : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ qui vérifie $\sigma_{|L} = \mathrm{id}_L$.

Pour σ un $\mathbb{C}$-automorphisme de $\mathbb{K}$, on définit $\sigma \cdot (u, v) = (\sigma(u), \sigma(v))$

Soit (u, v) dans $\mathcal{O}$ et σ un $\mathbb{C}$-automorphisme de $\mathbb{K}$.

$S(x, y) = S(x, y') = S(x', y') = \cdots = S(u, v)$

$S(\sigma(x), \sigma(y)) = S(\sigma(x), \sigma(y')) = S(\sigma(x'), \sigma(y')) = \cdots = S(\sigma(u), \sigma(v))$

Si de plus σ fixe x et $S(x, y)$ on a

$S(x, y) = S(x, \sigma(y)) = S(\sigma(x), \sigma(y)) = \cdots = S(\sigma(u), \sigma(v))$

Conclusion : $(x, y) \sim \sigma \cdot (x, y) \sim \cdots \sim \sigma \cdot (u, v)$

L'orbite est stable sous cette action de $\mathbb{C}(S(x, y), x)$-automorphismes de $\mathbb{K}$ et $\mathbb{C}(S(x, y), y)$-automorphismes de $\mathbb{K}$, qui préservent les adjacences.

Action d'automorphismes de corps

Rappel : si $\mathbb{K}/L$ est une extension de corps, un L-automorphisme de $\mathbb{K}$ est un homomorphisme d'anneaux $\sigma : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ qui vérifie $\sigma_{|L} = \mathrm{id}_L$.

Pour σ un $\mathbb{C}$-automorphisme de $\mathbb{K}$, on définit $\sigma \cdot (u, v) = (\sigma(u), \sigma(v))$

Soit (u, v) dans $\mathcal{O}$ et σ un $\mathbb{C}$-automorphisme de $\mathbb{K}$.

$S(x, y) = S(x, y') = S(x', y') = \cdots = S(u, v)$

$S(\sigma(x), \sigma(y)) = S(\sigma(x), \sigma(y')) = S(\sigma(x'), \sigma(y')) = \cdots = S(\sigma(u), \sigma(v))$

Si de plus σ fixe x et $S(x, y)$ on a

$S(x, y) = S(x, \sigma(y)) = S(\sigma(x), \sigma(y)) = \cdots = S(\sigma(u), \sigma(v))$

Conclusion : $(x, y) \sim \sigma \cdot (x, y) \sim \cdots \sim \sigma \cdot (u, v)$

L'orbite est stable sous cette action de $\mathbb{C}(S(x, y), x)$-automorphismes de $\mathbb{K}$ et $\mathbb{C}(S(x, y), y)$-automorphismes de $\mathbb{K}$, qui préservent les adjacences.

Action d'automorphismes de corps

Rappel : si $\mathbb{K}/L$ est une extension de corps, un L-automorphisme de $\mathbb{K}$ est un homomorphisme d'anneaux $\sigma : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ qui vérifie $\sigma_{|L} = \mathrm{id}_L$.

Pour σ un $\mathbb{C}$-automorphisme de $\mathbb{K}$, on définit $\sigma \cdot (u, v) = (\sigma(u), \sigma(v))$

Soit (u, v) dans $\mathcal{O}$ et σ un $\mathbb{C}$-automorphisme de $\mathbb{K}$.

$S(x, y) = S(x, y') = S(x', y') = \cdots = S(u, v)$

$S(\sigma(x), \sigma(y)) = S(\sigma(x), \sigma(y')) = S(\sigma(x'), \sigma(y')) = \cdots = S(\sigma(u), \sigma(v))$

Si de plus σ fixe x et $S(x, y)$ on a

$S(x, y) = S(x, \sigma(y)) = S(\sigma(x), \sigma(y)) = \cdots = S(\sigma(u), \sigma(v))$

Conclusion : $(x, y) \sim \sigma \cdot (x, y) \sim \cdots \sim \sigma \cdot (u, v)$

L'orbite est stable sous cette action de $\mathbb{C}(S(x, y), x)$-automorphismes de $\mathbb{K}$ et $\mathbb{C}(S(x, y), y)$-automorphismes de $\mathbb{K}$, qui préservent les adjacences.

Action d'automorphismes de corps

Rappel : si $\mathbb{K}/L$ est une extension de corps, un L-automorphisme de $\mathbb{K}$ est un homomorphisme d'anneaux $\sigma : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ qui vérifie $\sigma_{|L} = \mathrm{id}_L$.

Pour σ un $\mathbb{C}$-automorphisme de $\mathbb{K}$, on définit $\sigma \cdot (u, v) = (\sigma(u), \sigma(v))$

Soit (u, v) dans $\mathcal{O}$ et σ un $\mathbb{C}$-automorphisme de $\mathbb{K}$.

$S(x, y) = S(x, y') = S(x', y') = \cdots = S(u, v)$

$S(\sigma(x), \sigma(y)) = S(\sigma(x), \sigma(y')) = S(\sigma(x'), \sigma(y')) = \cdots = S(\sigma(u), \sigma(v))$

Si de plus σ fixe x et $S(x, y)$ on a

$S(x, y) = S(x, \sigma(y)) = S(\sigma(x), \sigma(y)) = \cdots = S(\sigma(u), \sigma(v))$

Conclusion : $(x, y) \sim \sigma \cdot (x, y) \sim \cdots \sim \sigma \cdot (u, v)$

L'orbite est stable sous cette action de $\mathbb{C}(S(x, y), x)$-automorphismes de $\mathbb{K}$ et $\mathbb{C}(S(x, y), y)$-automorphismes de $\mathbb{K}$, qui préservent les adjacences.

Le groupe généralisé

On pose $k = \mathbb{C}(S(x,y))$, $k(\mathcal{O})$ le corps engendré par les coordonnées d'éléments de l'orbite.

Proposition

Les extensions $k(\mathcal{O})/k(x)$ et $k(\mathcal{O})/k(y)$ sont Galoisiennes.

Notons G_x et G_y leurs groupes de Galois respectifs, $G = \langle G_x, G_y \rangle$

Théorème (B., Hardouin 22)

Le groupe G agit fidèlement et transitivement sur l'orbite par automorphismes de graphe. Cette action est finiment engendrée.

Le groupe généralisé

On pose $k = \mathbb{C}(S(x, y))$, $k(\mathcal{O})$ le corps engendré par les coordonnées d'éléments de l'orbite.

Proposition

Les extensions $k(\mathcal{O})/k(x)$ et $k(\mathcal{O})/k(y)$ sont Galoisiennes.

Notons G_x et G_y leurs groupes de Galois respectifs, $G = \langle G_x, G_y \rangle$

Théorème (B., Hardouin 22)

Le groupe G agit fidèlement et transitivement sur l'orbite par automorphismes de graphe. Cette action est finiment engendrée.

Le groupe généralisé

On pose $k = \mathbb{C}(S(x, y))$, $k(\mathcal{O})$ le corps engendré par les coordonnées d'éléments de l'orbite.

Proposition

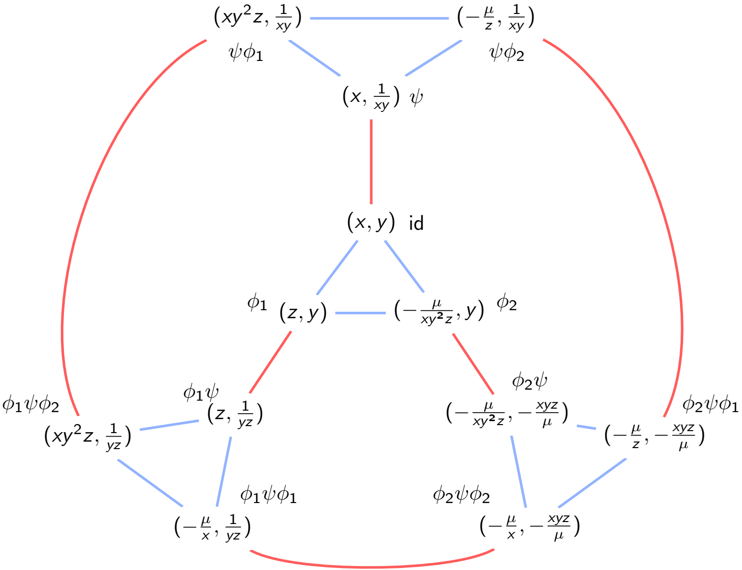
Les extensions $k(\mathcal{O})/k(x)$ et $k(\mathcal{O})/k(y)$ sont Galoisiennes.

Notons G_x et G_y leurs groupes de Galois respectifs, $G = \langle G_x, G_y \rangle$

Théorème (B., Hardouin 22)

Le groupe G agit fidèlement et transitivement sur l'orbite par automorphismes de graphe. Cette action est finiment engendrée.

Exemple sur $\mathcal{G}^{\lambda,\mu}$



Plan

Petits pas qui reculent : exemple de $\mathcal{G}^{\lambda,\mu}$

$$S(X,Y) = \mu Y + \frac{\mu}{XY} + X^2Y + \lambda X + \frac{X}{Y}$$

$$\widetilde{K}(X,Y,t) = XY - t\left(\mu XY^2 + \mu + X^3Y^2 + \lambda X^2 Y + X^2\right)$$

$$\widetilde{K}(X,Y,t)Q(X,Y,t) = XY - t(X^2+\mu)Q(X,0,t) - t\mu Q(0,Y,t) + t\mu Q(0,0,t)$$

$$\widetilde{K}(X,Y,t)Q(X,Y,t) = XY + A(X,t) + B(Y,t)$$

Petits pas qui reculent : exemple de $\mathcal{G}^{\lambda,\mu}$

$$S(X,Y) = \mu Y + \frac{\mu}{XY} + X^2 Y + \lambda X + \frac{X}{Y}$$

$$\widetilde{K}(X,Y,t) = XY - t\left(\mu X Y^2 + \mu + X^3 Y^2 + \lambda X^2 Y + X^2\right)$$

$$\widetilde{K}(X,Y,t)Q(X,Y,t) = XY - t(X^2+\mu)Q(X,0,t) - t\mu Q(0,Y,t) + t\mu Q(0,0,t)$$

$$\widetilde{K}(X,Y,t)Q(X,Y,t) = XY + A(X,t) + B(Y,t)$$

t-équivalence

$$\mathbb{C}_{\mathrm{mul}}(X,Y)[[t]] = \left\{ \sum_{n \geq 0} \frac{A_n(X,Y)}{B_n(X)C_n(Y)} t^n \middle| A_n, B_n, C_n \text{ polynômes} \right\}$$

Il existe une relation d'équivalence $\equiv$ sur $\mathbb{C}_{\mathrm{mul}}(X,Y)[[t]]$ compatible avec l'addition et la multiplication.

t-Invariants : $I(X,t) \equiv J(Y,t)$

Lemme

Si les coefficients de $I(X,t)$ et $J(Y,t)$ n'ont pas de pôle en $X = 0$ et $Y = 0$, alors il existe $A(t) \in \mathbb{C}[[t]]$ telle que

$$I(X,t) = J(Y,t) = A(t) \in \mathbb{C}[[t]]$$

Intérêt : les solutions d'équations d'une variable catalytique sont algébriques (Popescu, Bousquet-Mélou–Jehanne, Notarantonio–Yurkevych. . .)

t-équivalence

$$\mathbb{C}_{\mathrm{mul}}(X,Y)[[t]] = \left\{ \sum_{n\geq 0} \frac{A_n(X,Y)}{B_n(X)C_n(Y)} t^n \middle| A_n, B_n, C_n \text{ polynômes} \right\}$$

Il existe une relation d'équivalence $\equiv$ sur $\mathbb{C}_{\mathrm{mul}}(X,Y)[[t]]$ compatible avec l'addition et la multiplication.

t-Invariants : $I(X,t) \equiv J(Y,t)$

Lemme

Si les coefficients de $I(X,t)$ et $J(Y,t)$ n'ont pas de pôle en $X=0$ et $Y=0$, alors il existe $A(t) \in \mathbb{C}[[t]]$ telle que

$$I(X,t) = J(Y,t) = A(t) \in \mathbb{C}[[t]]$$

Intérêt : les solutions d'équations d'une variable catalytique sont algébriques (Popescu, Bousquet-Mélou–Jehanne, Notarantonio–Yurkevych. . .)

t-équivalence

$$\mathbb{C}_{\mathrm{mul}}(X,Y)[[t]] = \left\{ \sum_{n\geq 0} \frac{A_n(X,Y)}{B_n(X)C_n(Y)} t^n \,\middle|\, A_n, B_n, C_n \text{ polynômes} \right\}$$

Il existe une relation d'équivalence $\equiv$ sur $\mathbb{C}_{\mathrm{mul}}(X,Y)[[t]]$ compatible avec l'addition et la multiplication.

t-Invariants : $I(X,t) \equiv J(Y,t)$

Lemme

Si les coefficients de $I(X,t)$ et $J(Y,t)$ n'ont pas de pôle en $X=0$ et $Y=0$, alors il existe $A(t) \in \mathbb{C}[[t]]$ telle que

$$I(X,t) = J(Y,t) = A(t) \in \mathbb{C}[[t]]$$

Intérêt : les solutions d'équations d'une variable catalytique sont algébriques (Popescu, Bousquet-Mélou–Jehanne, Notarantonio–Yurkevych...)

t-équivalence

$$\mathbb{C}_{\mathrm{mul}}(X,Y)[[t]] = \left\{ \sum_{n\geq 0} \frac{A_n(X,Y)}{B_n(X)C_n(Y)} t^n \middle| A_n, B_n, C_n \text{ polynômes} \right\}$$

Il existe une relation d'équivalence $\equiv$ sur $\mathbb{C}_{\mathrm{mul}}(X,Y)[[t]]$ compatible avec l'addition et la multiplication.

t-Invariants : $I(X,t) \equiv J(Y,t)$

Lemme

Si les coefficients de $I(X,t)$ et $J(Y,t)$ n'ont pas de pôle en $X=0$ et $Y=0$, alors il existe $A(t) \in \mathbb{C}[[t]]$ telle que

$$I(X,t) = J(Y,t) = A(t) \in \mathbb{C}[[t]]$$

Intérêt : les solutions d'équations d'une variable catalytique sont algébriques (Popescu, Bousquet-Mélou–Jehanne, Notarantonio–Yurkevych. . .)

t-équivalence

$$\mathbb{C}_{\mathrm{mul}}(X,Y)[[t]] = \left\{ \sum_{n\geq 0} \frac{A_n(X,Y)}{B_n(X)C_n(Y)} t^n \middle| A_n, B_n, C_n \text{ polynômes} \right\}$$

Il existe une relation d'équivalence $\equiv$ sur $\mathbb{C}_{\mathrm{mul}}(X,Y)[[t]]$ compatible avec l'addition et la multiplication.

t-Invariants : $I(X,t) \equiv J(Y,t)$

Lemme

Si les coefficients de $I(X,t)$ et $J(Y,t)$ n'ont pas de pôle en $X = 0$ et $Y = 0$, alors il existe $A(t) \in \mathbb{C}[[t]]$ telle que

$$I(X,t) = J(Y,t) = A(t) \in \mathbb{C}[[t]]$$

Intérêt : les solutions d'équations d'une variable catalytique sont algébriques (Popescu, Bousquet-Mélou–Jehanne, Notarantonio–Yurkevych...)

Preuve générique d'algébricité

(Bernardi, Bousquet-Mélou, Raschel)

Équation de la forme suivante (petits pas qui reculent)

$$\widetilde{K}(X,Y,t)Q(X,Y,t) = XY + A(X,t) + B(Y,t)$$

$$XY \equiv F(X,t) + G(Y,t) \tag{1}$$

$$0 \equiv XY + A(X,t) + B(Y,t) \tag{2}$$

$$\boxed{I_1(X,t) = A(X,t) + F(X,t) \equiv -B(Y,t) - G(Y,t) = J1(Y,t)} \tag{3}$$

$$\boxed{I_2(X,t) \equiv J_2(Y,t)} \tag{4}$$

$$\dots$$

$$P(I_1(X,t), I_2(X,t)) \equiv P(J_1(Y,t), J_2(Y,t)) \tag{5}$$

$$P(I_1(X,t), I_2(X,t)) = P(J_1(Y,t), J_2(Y,t)) = D(t) \tag{6}$$

$\Rightarrow Q(X,Y,t)$ est algébrique sur $\mathbb{C}(X,Y,t)$

Preuve générique d'algébricité

(Bernardi, Bousquet-Mélou, Raschel)

Équation de la forme suivante (petits pas qui reculent)

$$\widetilde{K}(X,Y,t)Q(X,Y,t) = XY + A(X,t) + B(Y,t)$$

$$XY \equiv F(X,t) + G(Y,t) \tag{1}$$

$$0 \equiv XY + A(X,t) + B(Y,t) \tag{2}$$

$$\boxed{I_1(X,t) = A(X,t) + F(X,t) \equiv -B(Y,t) - G(Y,t) = J1(Y,t)} \tag{3}$$

$$\boxed{I_2(X,t) \equiv J_2(Y,t)} \tag{4}$$

$$\ldots$$

$$P(I_1(X,t), I_2(X,t)) \equiv P(J_1(Y,t), J_2(Y,t)) \tag{5}$$

$$P(I_1(X,t), I_2(X,t)) = P(J_1(Y,t), J_2(Y,t)) = D(t) \tag{6}$$

$\Rightarrow Q(X,Y,t)$ est algébrique sur $\mathbb{C}(X,Y,t)$

Preuve générique d'algébricité

(Bernardi, Bousquet-Mélou, Raschel)

Équation de la forme suivante (petits pas qui reculent)

$$\widetilde{K}(X,Y,t)Q(X,Y,t) = XY + A(X,t) + B(Y,t)$$

$$XY \equiv F(X,t) + G(Y,t) \tag{1}$$

$$0 \equiv XY + A(X,t) + B(Y,t) \tag{2}$$

$$\boxed{I_1(X,t) = A(X,t) + F(X,t) \equiv -B(Y,t) - G(Y,t) = J1(Y,t)} \tag{3}$$

$$\boxed{I_2(X,t) \equiv J_2(Y,t)} \tag{4}$$

$$\cdots$$

$$P(I_1(X,t), I_2(X,t)) \equiv P(J_1(Y,t), J_2(Y,t)) \tag{5}$$

$$P(I_1(X,t), I_2(X,t)) = P(J_1(Y,t), J_2(Y,t)) = D(t) \tag{6}$$

$\Rightarrow Q(X,Y,t)$ est algébrique sur $\mathbb{C}(X,Y,t)$

Preuve générique d'algébricité

(Bernardi, Bousquet-Mélou, Raschel)

Équation de la forme suivante (petits pas qui reculent)

$$\widetilde{K}(X,Y,t)Q(X,Y,t) = XY + A(X,t) + B(Y,t)$$

$$XY \equiv F(X,t) + G(Y,t) \quad (1)$$

$$0 \equiv XY + A(X,t) + B(Y,t) \quad (2)$$

$$\boxed{I_1(X,t) = A(X,t) + F(X,t) \equiv -B(Y,t) - G(Y,t) = J1(Y,t)} \quad (3)$$

$$\boxed{I_2(X,t) \equiv J_2(Y,t)} \quad (4)$$

$$\ldots$$

$$P(I_1(X,t), I_2(X,t)) \equiv P(J_1(Y,t), J_2(Y,t)) \quad (5)$$

$$P(I_1(X,t), I_2(X,t)) = P(J_1(Y,t), J_2(Y,t)) = D(t) \quad (6)$$

$\Rightarrow Q(X,Y,t)$ est algébrique sur $\mathbb{C}(X,Y,t)$

Preuve générique d'algébricité

(Bernardi, Bousquet-Mélou, Raschel)

Équation de la forme suivante (petits pas qui reculent)

$$\widetilde{K}(X,Y,t)Q(X,Y,t) = XY + A(X,t) + B(Y,t)$$

$$XY \equiv F(X,t) + G(Y,t) \tag{1}$$

$$0 \equiv XY + A(X,t) + B(Y,t) \tag{2}$$

$$\boxed{I_1(X,t) = A(X,t) + F(X,t) \equiv -B(Y,t) - G(Y,t) = J1(Y,t)} \tag{3}$$

$$\boxed{I_2(X,t) \equiv J_2(Y,t)} \tag{4}$$

$$\dots$$

$$P(I_1(X,t), I_2(X,t)) \equiv P(J_1(Y,t), J_2(Y,t)) \tag{5}$$

$$P(I_1(X,t), I_2(X,t)) = P(J_1(Y,t), J_2(Y,t)) = D(t) \tag{6}$$

$\Rightarrow Q(X,Y,t)$ est algébrique sur $\mathbb{C}(X,Y,t)$

Preuve générique d'algébricité

(Bernardi, Bousquet-Mélou, Raschel)

Équation de la forme suivante (petits pas qui reculent)

$$\widetilde{K}(X,Y,t)Q(X,Y,t) = XY + A(X,t) + B(Y,t)$$

$$XY \equiv F(X,t) + G(Y,t) \quad (1)$$

$$0 \equiv XY + A(X,t) + B(Y,t) \quad (2)$$

$$\boxed{I_1(X,t) = A(X,t) + F(X,t) \equiv -B(Y,t) - G(Y,t) = J1(Y,t)} \quad (3)$$

$$\boxed{I_2(X,t) \equiv J_2(Y,t)} \quad (4)$$

$$\dots$$

$$P(I_1(X,t), I_2(X,t)) \equiv P(J_1(Y,t), J_2(Y,t)) \quad (5)$$

$$P(I_1(X,t), I_2(X,t)) = P(J_1(Y,t), J_2(Y,t)) = D(t) \quad (6)$$

$\Rightarrow Q(X,Y,t)$ est algébrique sur $\mathbb{C}(X,Y,t)$

Preuve générique d'algébricité

(Bernardi, Bousquet-Mélou, Raschel)

Équation de la forme suivante (petits pas qui reculent)

$$\widetilde{K}(X,Y,t)Q(X,Y,t) = XY + A(X,t) + B(Y,t)$$

$$XY \equiv F(X,t) + G(Y,t) \tag{1}$$

$$0 \equiv XY + A(X,t) + B(Y,t) \tag{2}$$

$$\boxed{I_1(X,t) = A(X,t) + F(X,t) \equiv -B(Y,t) - G(Y,t) = J1(Y,t)} \tag{3}$$

$$\boxed{I_2(X,t) \equiv J_2(Y,t)} \tag{4}$$

$$\dots$$

$$P(I_1(X,t), I_2(X,t)) \equiv P(J_1(Y,t), J_2(Y,t)) \tag{5}$$

$$P(I_1(X,t), I_2(X,t)) = P(J_1(Y,t), J_2(Y,t)) = D(t) \tag{6}$$

$\Rightarrow$ $Q(X,Y,t)$ est algébrique sur $\mathbb{C}(X,Y,t)$

Fractions et éléments de $k(\mathcal{O})$

Pour $H(X,Y,t) = \frac{A(X,Y,t)}{B(X,Y,t)}$ et $\widetilde{K}$ ne divisant pas B (H *régulière*),

$H_{(u,v)} = H(u,v,1/S(x,y)) \in k(\mathcal{O})$ est bien définie pour $(u,v) \in \mathcal{O}$.

$H_c = \sum_{(u,v)\in\mathcal{O}} c_{u,v} H_{(u,v)} \in k(\mathcal{O})$

Exemple : $c = (x,y) + 2(x,y') - (u,v)$ et $H = XY^2$

$$H_c = xy^2 + 2x(y')^2 - uv^2$$

Fractions et éléments de $k(\mathcal{O})$

Pour $H(X,Y,t) = \frac{A(X,Y,t)}{B(X,Y,t)}$ et $\widetilde{K}$ ne divisant pas B (H *régulière*),

$H_{(u,v)} = H(u,v,1/S(x,y)) \in k(\mathcal{O})$ est bien définie pour $(u,v) \in \mathcal{O}$.

$H_c = \sum_{(u,v)\in\mathcal{O}} c_{u,v} H_{(u,v)} \in k(\mathcal{O})$

Exemple : $c = (x,y) + 2(x,y') - (u,v)$ et $H = XY^2$

$$H_c = xy^2 + 2x(y')^2 - uv^2$$

Fractions et éléments de $k(\mathcal{O})$

Pour $H(X,Y,t) = \frac{A(X,Y,t)}{B(X,Y,t)}$ et $\widetilde{K}$ ne divisant pas B (H *régulière*),

$H_{(u,v)} = H(u,v,1/S(x,y)) \in k(\mathcal{O})$ est bien définie pour $(u,v) \in \mathcal{O}$.

$H_c = \sum_{(u,v)\in\mathcal{O}} c_{u,v} H_{(u,v)} \in k(\mathcal{O})$

Exemple : $c = (x,y) + 2(x,y') - (u,v)$ et $H = XY^2$

$$H_c = xy^2 + 2x(y')^2 - uv^2$$

Fractions et éléments de $k(\mathcal{O})$

Pour $H(X,Y,t) = \frac{A(X,Y,t)}{B(X,Y,t)}$ et $\widetilde{K}$ ne divisant pas B (H *régulière*),

$H_{(u,v)} = H(u,v,1/S(x,y)) \in k(\mathcal{O})$ est bien définie pour $(u,v) \in \mathcal{O}$.

$H_c = \sum_{(u,v)\in\mathcal{O}} c_{u,v} H_{(u,v)} \in k(\mathcal{O})$

Exemple : $c = (x,y) + 2(x,y') - (u,v)$ et $H = XY^2$

$$H_c = xy^2 + 2x(y')^2 - uv^2$$

Invariants et découplage Galoisien

Proposition

$H(X, Y, t) \equiv H'(X, Y, t) \Rightarrow H(x, y, 1/S(x, y)) = H'(x, y, 1/S(x, y))$.

	t-equivalence	Égalité dans $k(\mathcal{O})$
Invariants	$I(X, t) \equiv J(Y, t)$	$f \in k(x) \cap k(y) = k_{\mathrm{inv}}$
Découplage	$H(X, Y, t) \equiv F(X, t) + G(Y, t)$	$H(x, y, 1/S(x, y)) = f + g \in k(x) + k(y)$

Existence de t-invariants/t-découplage de H seulement si et seulement si existence d'invariants découplage Galoisien qui admettent un relèvement.

Invariants et découplage Galoisien

Proposition

$H(X, Y, t) \equiv H'(X, Y, t) \Rightarrow H(x, y, 1/S(x, y)) = H'(x, y, 1/S(x, y))$.

	t-equivalence	Égalité dans $k(\mathcal{O})$
Invariants	$I(X, t) \equiv J(Y, t)$	$f \in k(x) \cap k(y) = k_{\mathrm{inv}}$
Découplage	$H(X, Y, t) \equiv F(X, t) + G(Y, t)$	$H(x, y, 1/S(x, y)) = f + g \in k(x) + k(y)$

Existence de t-invariants/t-découplage de H seulement si et seulement si existence d'invariants découplage Galoisien qui admettent un relèvement.

Invariants et découplage Galoisien

Proposition

$H(X,Y,t) \equiv H'(X,Y,t) \Rightarrow H(x,y,1/S(x,y)) = H'(x,y,1/S(x,y))$.

	t-equivalence	Égalité dans $k(\mathcal{O})$
Invariants	$I(X,t) \equiv J(Y,t)$	$f \in k(x) \cap k(y) = k_{\mathrm{inv}}$
Découplage	$H(X,Y,t) \equiv F(X,t) + G(Y,t)$	$H(x,y,1/S(x,y)) = f + g \in k(x) + k(y)$

Existence de t-invariants/t-découplage de H seulement si et seulement si existence d'invariants découplage Galoisien qui admettent un relèvement.

Invariants

Théorème (Fried 78 ; B., Hardouin 22)

Il y a équivalence entre

1. *Orbite finie*
2. *Groupe fini*
3. *Existence d'invariants Galoisiens non-triviaux*

Algo : si l'orbite est finie, on montre que $k_{\mathrm{inv}} = k(f)$ pour f transcendant sur k, et f est n'importe quel coefficient d'un polynôme annulateur des coordonnées gauches ou droites de l'orbite.

Pour $\mathcal{G}^{\lambda,\mu}$:

$$\left(\frac{(-\lambda^2\mu X^3 - \mu X^4 - X^6 + \mu^2 X^2 + \mu^3)t^2 - X^2\lambda(X^2-\mu)t + X^3}{t^2 X(X^2+\mu)^2}, \frac{-\mu t Y^4 + \lambda t Y + Y^3 + t}{Y^2 t} \right).$$

Invariants

Théorème (Fried 78 ; B., Hardouin 22)

Il y a équivalence entre

1. *Orbite finie*
2. *Groupe fini*
3. *Existence d'invariants Galoisiens non-triviaux*

Algo : si l'orbite est finie, on montre que $k_{\mathrm{inv}} = k(f)$ pour f transcendant sur k, et f est n'importe quel coefficient d'un polynôme annulateur des coordonnées gauches ou droites de l'orbite.

Pour $\mathcal{G}^{\lambda,\mu}$:

$$\left(\frac{\left(-\lambda^2\mu X^3 - \mu X^4 - X^6 + \mu^2 X^2 + \mu^3\right)t^2 - X^2\lambda\left(X^2-\mu\right)t + X^3}{t^2 X (X^2+\mu)^2}, \frac{-\mu t Y^4 + \lambda t Y + Y^3 + t}{Y^2 t} \right).$$

Invariants

Théorème (Fried 78 ; B., Hardouin 22)

Il y a équivalence entre

1. *Orbite finie*
2. *Groupe fini*
3. *Existence d'invariants Galoisiens non-triviaux*

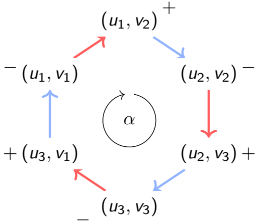
Algo : si l'orbite est finie, on montre que $k_{\mathrm{inv}} = k(f)$ pour f transcendant sur k, et f est n'importe quel coefficient d'un polynôme annulateur des coordonnées gauches ou droites de l'orbite.

Pour $\mathcal{G}^{\lambda,\mu}$:

$$\left(\frac{\left(-\lambda^2\mu X^3 - \mu X^4 - X^6 + \mu^2 X^2 + \mu^3\right)t^2 - X^2\lambda\left(X^2-\mu\right)t + X^3}{t^2 X(X^2+\mu)^2}, \frac{-\mu t Y^4 + \lambda t Y + Y^3 + t}{Y^2 t} \right).$$

Découplage

Considérons α une 0-chaîne induite par un cycle bicolore :



$$\alpha = (u_1, v_2) - (u_1, v_1) + (u_2, v_3) - (u_2, v_2) + (u_3, v_1) - (u_3, v_3)$$

$$F(X)_\alpha = F(u_1) - F(u_1) + F(u_2) - F(u_2) + F(u_3) - F(u_3) = 0$$

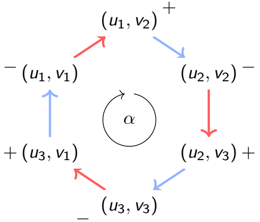
$$G(Y)_\alpha = G(v_2) - G(v_1) + G(v_3) - G(v_2) + G(v_1) - G(v_3) = 0$$

Si $H(X, Y, t)$ découple, alors $H_\alpha = 0$.

Réciproque ?

Découplage

Considérons α une 0-chaîne induite par un cycle bicolore :



$$\alpha = (u_1, v_2) - (u_1, v_1) + (u_2, v_3) - (u_2, v_2) + (u_3, v_1) - (u_3, v_3)$$

$$F(X)_\alpha = F(u_1) - F(u_1) + F(u_2) - F(u_2) + F(u_3) - F(u_3) = 0$$

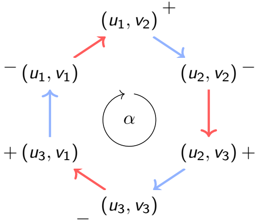
$$G(Y)_\alpha = G(v_2) - G(v_1) + G(v_3) - G(v_2) + G(v_1) - G(v_3) = 0$$

Si $H(X, Y, t)$ découple, alors $H_\alpha = 0$.

Réciproque ?

Découplage

Considérons α une 0-chaîne induite par un cycle bicolore :



$$\alpha = (u_1, v_2) - (u_1, v_1) + (u_2, v_3) - (u_2, v_2) + (u_3, v_1) - (u_3, v_3)$$

$$F(X)_\alpha = F(u_1) - F(u_1) + F(u_2) - F(u_2) + F(u_3) - F(u_3) = 0$$

$$G(Y)_\alpha = G(v_2) - G(v_1) + G(v_3) - G(v_2) + G(v_1) - G(v_3) = 0$$

Si $H(X, Y, t)$ découple, alors $H_\alpha = 0$.

Réciproque ?

Découplage dans l'orbite

Un triplet de 0-chaînes $(\gamma_x, \gamma_y, \alpha)$ est un *découplage de* (x, y) si

- $(x, y) = \gamma_x + \gamma_y + \alpha$
- $H_{\gamma_x} \in k(x)$ pour toute $H(X, Y, t)$ régulière
- $H_{\gamma_y} \in k(y)$ pour toute $H(X, Y, t)$ régulière
- $H_\alpha = 0$ si H découple

S'il en existe un, alors pour tout $H(X, Y, t)$ régulière

$$H(x, y) = H_{\gamma_x} + H_{\gamma_y} + H_\alpha$$

H découple si et seulement si $H_\alpha = 0$, et dans ce cas son découplage est donné par $H(x, y, 1/S(x, y)) = H_{\gamma_x} + H_{\gamma_y}$.

Découplage dans l'orbite

Un triplet de 0-chaînes $(\gamma_x, \gamma_y, \alpha)$ est un *découplage de* (x, y) si

- $(x, y) = \gamma_x + \gamma_y + \alpha$
- $H_{\gamma_x} \in k(x)$ pour toute $H(X, Y, t)$ régulière
- $H_{\gamma_y} \in k(y)$ pour toute $H(X, Y, t)$ régulière
- $H_\alpha = 0$ si H découple

S'il en existe un, alors pour tout $H(X, Y, t)$ régulière

$$H(x, y) = H_{\gamma_x} + H_{\gamma_y} + H_\alpha$$

H découple si et seulement si $H_\alpha = 0$, et dans ce cas son découplage est donné par $H(x, y, 1/S(x, y)) = H_{\gamma_x} + H_{\gamma_y}$.

Découplage dans l'orbite

Un triplet de 0-chaînes $(\gamma_x, \gamma_y, \alpha)$ est un *découplage de* (x, y) si

- $(x, y) = \gamma_x + \gamma_y + \alpha$
- $H_{\gamma_x} \in k(x)$ pour toute $H(X, Y, t)$ régulière
- $H_{\gamma_y} \in k(y)$ pour toute $H(X, Y, t)$ régulière
- $H_\alpha = 0$ si H découple

S'il en existe un, alors pour tout $H(X, Y, t)$ régulière

$$H(x, y) = H_{\gamma_x} + H_{\gamma_y} + H_\alpha$$

H découple si et seulement si $H_\alpha = 0$, et dans ce cas son découplage est donné par $H(x, y, 1/S(x, y)) = H_{\gamma_x} + H_{\gamma_y}$.

Découplage dans l'orbite

Un triplet de 0-chaînes $(\gamma_x, \gamma_y, \alpha)$ est un *découplage de* (x, y) si

- $(x, y) = \gamma_x + \gamma_y + \alpha$
- $H_{\gamma_x} \in k(x)$ pour toute $H(X, Y, t)$ régulière
- $H_{\gamma_y} \in k(y)$ pour toute $H(X, Y, t)$ régulière
- $H_\alpha = 0$ si H découple

S'il en existe un, alors pour tout $H(X, Y, t)$ régulière

$$H(x, y) = H_{\gamma_x} + H_{\gamma_y} + H_\alpha$$

H découple si et seulement si $H_\alpha = 0$, et dans ce cas son découplage est donné par $H(x, y, 1/S(x, y)) = H_{\gamma_x} + H_{\gamma_y}$.

Découplage dans l'orbite

Un triplet de 0-chaînes $(\gamma_x, \gamma_y, \alpha)$ est un *découplage de* (x, y) si

- $(x, y) = \gamma_x + \gamma_y + \alpha$
- $H_{\gamma_x} \in k(x)$ pour toute $H(X, Y, t)$ régulière
- $H_{\gamma_y} \in k(y)$ pour toute $H(X, Y, t)$ régulière
- $H_\alpha = 0$ si H découple

S'il en existe un, alors pour tout $H(X, Y, t)$ régulière

$$H(x, y) = H_{\gamma_x} + H_{\gamma_y} + H_\alpha$$

H découple si et seulement si $H_\alpha = 0$, et dans ce cas son découplage est donné par $H(x, y, 1/S(x, y)) = H_{\gamma_x} + H_{\gamma_y}$.

Découplage dans l'orbite

Un triplet de 0-chaînes $(\gamma_x, \gamma_y, \alpha)$ est un *découplage de* (x, y) si

- $(x, y) = \gamma_x + \gamma_y + \alpha$
- $H_{\gamma_x} \in k(x)$ pour toute $H(X, Y, t)$ régulière
- $H_{\gamma_y} \in k(y)$ pour toute $H(X, Y, t)$ régulière
- $H_\alpha = 0$ si H découple

S'il en existe un, alors pour tout $H(X, Y, t)$ régulière

$$H(x, y) = H_{\gamma_x} + H_{\gamma_y} + H_\alpha$$

H découple si et seulement si $H_\alpha = 0$, et dans ce cas son découplage est donné par $H(x, y, 1/S(x, y)) = H_{\gamma_x} + H_{\gamma_y}$.

Découplage dans l'orbite

Un triplet de 0-chaînes $(\gamma_x, \gamma_y, \alpha)$ est un *découplage de* (x, y) si

- $(x, y) = \gamma_x + \gamma_y + \alpha$
- $H_{\gamma_x} \in k(x)$ pour toute $H(X, Y, t)$ régulière
- $H_{\gamma_y} \in k(y)$ pour toute $H(X, Y, t)$ régulière
- $H_\alpha = 0$ si H découple

S'il en existe un, alors pour tout $H(X, Y, t)$ régulière

$$H(x, y) = H_{\gamma_x} + H_{\gamma_y} + H_\alpha$$

H découple si et seulement si $H_\alpha = 0$, et dans ce cas son découplage est donné par $H(x, y, 1/S(x, y)) = H_{\gamma_x} + H_{\gamma_y}$.

Idée maîtresse

$$C(x'', y'')$$

$$\begin{tikzcd}
(x, y) \arrow[d] & - \\
(x', y) \arrow[d] & + \\
(x', y') \arrow[d] & - \\
(x'', y') \arrow[d] & + \\
(x'', y'') & -
\end{tikzcd}$$

$$\sigma_x \cdot C(x'', y'') - C(\sigma_x \cdot (x'', y''))$$

$$\begin{tikzcd}
- & (x, \sigma_x(y)) \arrow[d] & (x, y) \arrow[l] & + \\
+ & (\sigma_x(x'), \sigma_x(y)) \arrow[d] & (x''', y) \arrow[u] & - \\
- & (\sigma_x(x'), \sigma_x(y')) \arrow[d] & (x''', y'') \arrow[u] & + \\
+ & (\sigma_x(x''), \sigma_x(y')) \arrow[d] & (\sigma_x(x''), y'') \arrow[u] & - \\
0 & (\sigma_x(x''), \sigma_x(y'')) \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

$\forall \sigma_x \in G_x, \sigma_x \cdot H_{C(x'', y'')} = H_{C(x'', y'')}$ donc $H_{C(x'', y'')} \in k(x)$ si H découple

$$v - (x,y) = C(v) + C'(v)$$

$$\frac{1}{|\mathcal{O}|}\sum_{v\in\mathcal{O}} v - (x,y) = \frac{1}{|\mathcal{O}|}\sum_{v\in\mathcal{O}} C(v) + \frac{1}{|\mathcal{O}|}\sum_{v\in\mathcal{O}} C'(v)$$

$$v - (x, y) = C(v) + C'(v)$$

$$\frac{1}{|\mathcal{O}|} \sum_{v \in \mathcal{O}} v - (x, y) = \frac{1}{|\mathcal{O}|} \sum_{v \in \mathcal{O}} C(v) + \frac{1}{|\mathcal{O}|} \sum_{v \in \mathcal{O}} C'(v)$$

Découplage dans l'orbite

Théorème (B., Hardouin 23)

Dans toute orbite finie, (x, y) admet un découplage (explicite).

Si de plus l'orbite vérifie une propriété de *distance-transitivité* (qui n'est pas systématique), alors le découplage est donné commme combinaison de 0-*chaînes symétriques* explicites (qui sont de la forme)

$$\sum_{(u,v)\in\mathcal{O}|P(u)=0}(u,v) \quad \text{ou} \quad \sum_{(u,v)\in\mathcal{O}|P(v)=0}(u,v)$$

Formule :

$$\gamma_x = -\frac{1}{|\mathcal{O}|}\sum_{i\geq 0}|\mathcal{X}_i|\sum_{\substack{j\leq i\\ j \text{ odd}}}\frac{X_j}{|\mathcal{X}_j|}-\frac{X_{j-1}}{|\mathcal{X}_{j-1}|} \quad \text{and} \quad \gamma_y = -\frac{1}{|\mathcal{O}|}\sum_{i\geq 0}|\mathcal{Y}_i|\sum_{\substack{j\leq i\\ j \text{ odd}}}\frac{Y_j}{|\mathcal{Y}_j|}-\frac{Y_{j-1}}{|\mathcal{Y}_{j-1}|}$$

Découplage dans l'orbite

Théorème (B., Hardouin 23)

Dans toute orbite finie, (x, y) admet un découplage (explicite).

Si de plus l'orbite vérifie une propriété de *distance-transitivité* (qui n'est pas systématique), alors le découplage est donné commme combinaison de 0-*chaînes symétriques* explicites (qui sont de la forme)

$$\sum_{(u,v)\in\mathcal{O}|P(u)=0} (u, v) \quad \text{ou} \quad \sum_{(u,v)\in\mathcal{O}|P(v)=0} (u, v)$$

Formule :

$$\gamma_x = -\frac{1}{|\mathcal{O}|}\sum_{i\geq 0}|\mathcal{X}_i|\sum_{\substack{j\leq i\\ j \text{ odd}}}\frac{X_j}{|\mathcal{X}_j|}-\frac{X_{j-1}}{|\mathcal{X}_{j-1}|} \quad \text{and} \quad \gamma_y = -\frac{1}{|\mathcal{O}|}\sum_{i\geq 0}|\mathcal{Y}_i|\sum_{\substack{j\leq i\\ j \text{ odd}}}\frac{Y_j}{|\mathcal{Y}_j|}-\frac{Y_{j-1}}{|\mathcal{Y}_{j-1}|}$$

Découplage dans l'orbite

Théorème (B., Hardouin 23)

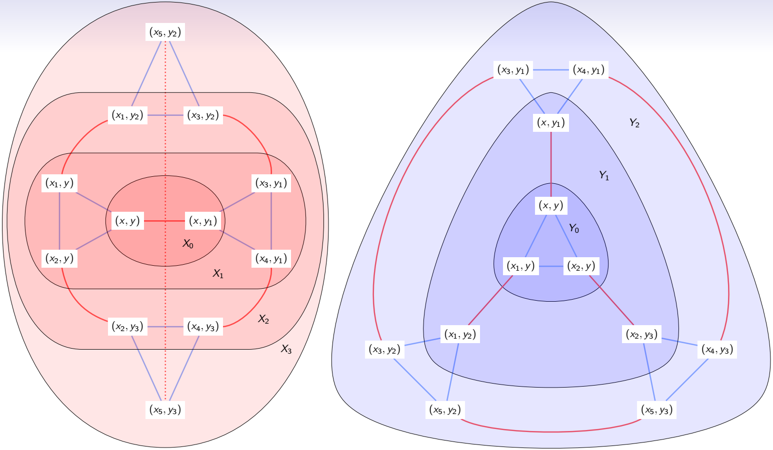
Dans toute orbite finie, (x, y) admet un découplage (explicite).

Si de plus l'orbite vérifie une propriété de *distance-transitivité* (qui n'est pas systématique), alors le découplage est donné commme combinaison de 0-*chaînes symétriques* explicites (qui sont de la forme)

$$\sum_{(u,v)\in\mathcal{O}|P(u)=0} (u, v) \quad \text{ou} \quad \sum_{(u,v)\in\mathcal{O}|P(v)=0} (u, v)$$

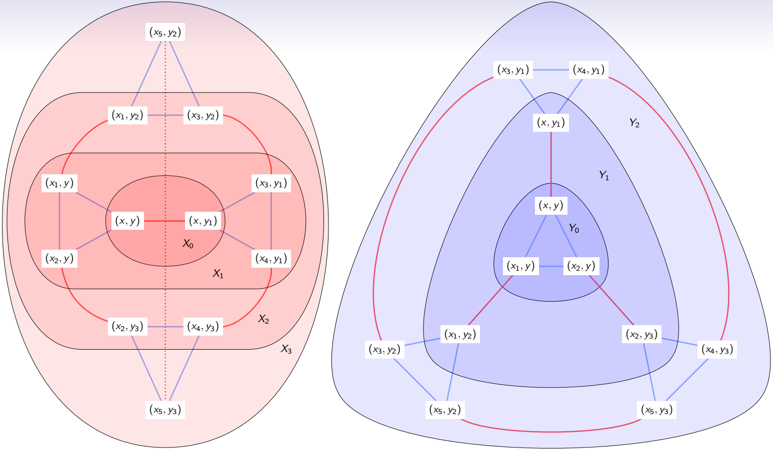
Formule :

$$\gamma_x = -\frac{1}{|\mathcal{O}|}\sum_{i\geq 0}|\mathcal{X}_i|\sum_{\substack{j\leq i\\ j \text{ odd}}}\frac{X_j}{|\mathcal{X}_j|} - \frac{X_{j-1}}{|\mathcal{X}_{j-1}|} \quad \text{and} \quad \gamma_y = -\frac{1}{|\mathcal{O}|}\sum_{i\geq 0}|\mathcal{Y}_i|\sum_{\substack{j\leq i\\ j \text{ odd}}}\frac{Y_j}{|\mathcal{Y}_j|} - \frac{Y_{j-1}}{|\mathcal{Y}_{j-1}|}$$



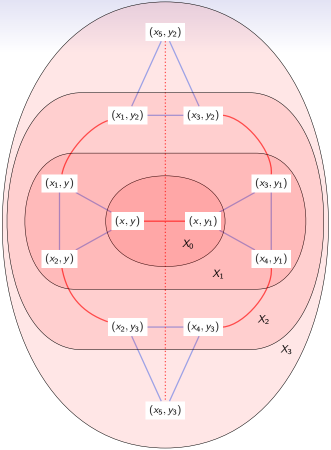
$$(x, y) = \left(\frac{X_0}{2} - \frac{X_1}{8} + \frac{X_2}{8}\right) + \left(\frac{Y_0}{4} - \frac{Y_1}{4}\right) + \alpha,$$

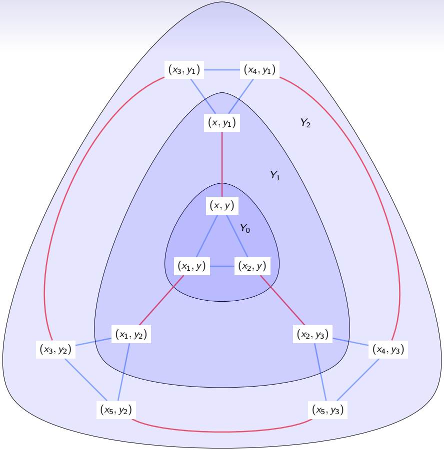
$$xy = -\frac{3\lambda x^2/S(x, y) - \mu\lambda/S(x, y) - 4x}{4(x^2 + \mu)/S(x, y)} + \frac{-\lambda y - 4}{4y} + 0.$$



$$(x, y) = \left(\frac{X_0}{2} - \frac{X_1}{8} + \frac{X_2}{8}\right) + \left(\frac{Y_0}{4} - \frac{Y_1}{4}\right) + \alpha,$$

$$xy = -\frac{3\lambda x^2/S(x,y) - \mu\lambda/S(x,y) - 4x}{4(x^2+\mu)/S(x,y)} + \frac{-\lambda y - 4}{4y} + 0.$$





$$(x, y) = \left(\frac{X_0}{2} - \frac{X_1}{8} + \frac{X_2}{8}\right) + \left(\frac{Y_0}{4} - \frac{Y_1}{4}\right) + \alpha,$$

$$xy = -\frac{3\lambda x^2/S(x,y) - \mu\lambda/S(x,y) - 4x}{4(x^2+\mu)/S(x,y)} + \frac{-\lambda y - 4}{4y} + 0.$$